Universidad Nacional Autónoma de México
Colegio de Ciencias y Humanidades
Centro de Formación Continua

ARGUMENTACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Texto de apoyo

Ángel Homero Flores Samaniego
Centro de Formación Continua-CCH
ahfs@unam.mx

Agosto de 2020

Índice de Contenidos

INTRODUCCIÓN

Para los efectos del presente texto, consideramos que un científico es toda aquella persona que se dedica a la ciencia, sin hacer distinciones sobre el carácter de dicha ciencia: puede ser natural o social (incluyendo la historia).

Un científico debe poseer una manera de pensar y de concebir su entorno acorde con su posición de persona que busca el conocimiento. Este conocimiento debe ser válido, considerado como verdadero por la comunidad de científicos en la que se desenvuelve y, de ser el caso, por la sociedad a la que pertenece.

El pensamiento científico es un pensamiento reflexivo que se puede resumir de la siguiente manera (Rodgers, 2002: 845):

- Es un proceso de formación de significados que lleva al individuo de una experiencia a otra con un entendimiento más profundo de sus relaciones y sus conexiones con otras experiencias y otras ideas.
- Es una manera de pensar sistemática, rigurosa y disciplinada, con sus raíces en el cuestionamiento científico.
- Es necesario que se dé en el seno de una comunidad, a partir de la interacción entre individuos.
- Requiere actitudes que valoren el crecimiento personal e intelectual del individuo mismo y de los demás.

Según, John Dewey (1910), filósofo y pedagogo estadounidense, el pensamiento reflexivo sigue cinco pasos lógicos:

a) La sensación de una dificultad o su percepción.
b) Su ubicación y su definición.
c) Sugerencias de posibles soluciones o explicaciones en la forma de hipótesis o de conjeturas.
d) Desarrollo, mediante razonamientos lógicos, de las implicaciones de las sugerencias.
e) Observación y experimentación más detallada que lleva a la aceptación o al rechazo de la posible solución o explicación, es decir, de la conjetura.

Esto es, una persona percibe una dificultad, un problema, o algo que no encaja del todo en una situación; el pensamiento reflexivo hace que la persona ubique y defina aquello que despertó su curiosidad; sugiere posibles causas y, si la situación es conflictiva, posibles soluciones; ahora, mediante inferencias lógicas, determina las implicaciones que pueden tener las sugerencias de solución, es decir, las conjeturas sobre las causas del conflicto o sobre las posibles soluciones; finalmente, el pensamiento reflexivo lleva a hacer una especie de recapitulación, observando y analizando con más detalle lo que tiene hasta ese momento, y esto lleva a aceptar o no las conjeturas como válidas. El pensamiento reflexivo influye en el sistema de creencias de un individuo, ya sea reforzando algunas de ellas o desechando otras.

Ahora bien, el tipo de razonamiento que utiliza un matemático cuando hace matemática es una forma muy especial del pensamiento reflexivo. El pensamiento matemático dota al individuo de las habilidades de razonamiento abstracto que le permitirán adquirir la capacidad de resolver problemas de manera efectiva, haciendo un uso racional de las herramientas tecnológicas a su alcance.

Así pues, el pensamiento matemático es el pensamiento reflexivo que se pone en juego durante el proceso de hacer matemática; este razonamiento tiene elementos inductivos, deductivos y abductivos y adquiere características especiales dependiendo del contexto matemático en el que se dé. Dividimos el pensamiento matemático en cinco categorías igualmente importantes y que se complementan entre sí:

- Razonamiento numérico: implica la comprensión de los números y su representación, así como su conformación en conjuntos específicos en donde existen operaciones y transformaciones entre ellos.
- Razonamiento algebraico: se refiere al entendimiento de los procesos de reconocimiento de patrones y generalización.
- Razonamiento variacional: está conformado por la comprensión de las relaciones funcionales y los procesos de cambio.
- Razonamiento geométrico: implica la percepción espacial de los objetos que nos rodean y la comprensión de sus relaciones.
- Razonamiento probabilístico y estocástico: tiene que ver con la comprensión de los procesos azarosos y de cálculo de probabilidades.

La matemática es inherente a cualquier actividad humana, desde el quehacer científico y humanístico, hasta las manifestaciones culturales y artísticas. Por tal motivo, es importante desarrollar aquellos aspectos básicos de la matemática que permitirán desempeñarse satisfactoriamente en el contexto social y laboral, no sólo en el académico o científico.

Para entender la naturaleza de la matemática y la manera en que se construye el conocimiento matemático, es necesario hacer una recapitulación sobre cómo se genera y se valida el conocimiento matemático, que no es muy diferente al proceso que sigue el conocimiento científico en general.

Básicamente, los resultados que un matemático obtiene de sus investigaciones aparecen, en primer término, como una serie de conjeturas que debe validar. Es muy probable que una conjetura se forme a partir de una serie de hechos aislados, siguiendo un proceso inductivo. Si las evidencias obtenidas convencen al matemático de su plausibilidad, es decir, si hay un proceso de auto convencimiento de la veracidad de sus hallazgos, entonces se aventura a buscar una demostración matemática, basada en procesos deductivos. Una vez que tiene la demostración de su conjetura, la somete a la revisión y al escrutinio de sus colegas, dando inicio, así, a un proceso de persuasión sobre su validez. Si los resultados son lo suficientemente interesantes o relevantes para el conocimiento y la teoría matemática, es posible que la revisión de la demostración lógica de la conjetura se haga de tal manera que se dé una serie de pruebas y refutaciones hasta que sea aceptada o rechazada por la comunidad.

Si la conjetura es aceptada como válida, entonces adquiere el estatus de teorema; si no, la conjetura puede utilizarse con las reservas del caso. En ambos casos, teorema y conjetura, vienen a formar parte del conocimiento matemático.

Lo interesante de este proceso de formación de conjeturas y su validación, es que el pensamiento reflexivo juega un papel importante. Esto es, el investigador, siguiendo más o menos en el mismo orden los pasos lógicos del pensamiento reflexivo definidos por Dewey, percibe que algo puede ser importante; ubica ese algo y lo define o trata de definirlo; sugiere posibles explicaciones en forma de una conjetura; razona de manera lógica sobre la validez de su conjetura; y busca mayores evidencias de ésta, hasta que termina por aceptarla o rechazarla. Ahora bien, este conocimiento se da en el seno de una comunidad, por ello la necesidad de someterlo a su escrutinio; esta misma necesidad de que el resultado sea reconocido como válido por la comunidad, hace que el investigador se someta a una serie de reglas establecidas tanto en la disciplina misma como por la comunidad en la que se desenvuelve. En este caso, hablamos del respeto a las reglas matemáticas y la honestidad en los planteamientos.

Por tanto, la matemática y la generación de conocimiento matemático implican el desarrollo de un pensamiento reflexivo contextualizado que se puede fomentar haciendo matemática. Un pensamiento reflexivo que será de gran ayuda en la formación de científicos y en la investigación científica.

En este ensayo se hará una reflexión sobre los procesos de razonamiento que están detrás de la generación y la manifestación del conocimiento científico en general y el matemático en particular; el papel que juega la argumentación en la validación del conocimiento matemático y sus implicaciones en la docencia.

FORMACIÓN DE CONJETURAS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA LÓGICA

Pensemos en el siguiente razonamiento:

> ***Premisa Mayor***: *Todos los perros son animales.*
>
> ***Premisa Menor:*** *Jackson es un perro.*
>
> ***Conclusión***: *Jackson es un animal.*

Éste es un modo de silogismo llamado *Barbara*, podemos decir que se trata de uno de los razonamientos más directos y fáciles de comprender. Es un razonamiento deductivo en el que la premisa mayor es una **regla general**, la premisa menor es un **caso particular** y la **conclusión** se obtiene directamente de las otras dos. El razonamiento será válido si las dos premisas son válidas.

Ahora, si cambiamos de lugar la premisa mayor y la ponemos al final del silogismo tendremos:

Premisa 1: *Jackson es un perro*

Premisa 2: *Jackson es un animal.*

Conclusión: *Todos los perros son animales.*

En este caso tenemos una inducción. Las dos premisas apuntan a un caso particular, Jackson es un perro y es animal. Este caso lleva a una regla general: *Todos los perros son animales.* La conclusión es débil, no es posible decir que sea válida tomando como ejemplo un solo perro. Habría que indagar más. En este tipo de razonamiento el conocimiento para determinar la validez de la conclusión está contenido en las dos premisas, la validación consistiría en encontrar más casos de perros que también sean animales: cuántos más perros animales encontremos, más fuerte será la conclusión. Decimos que la conclusión es una conjetura.

Intercambiemos ahora la segunda premisa y la conclusión en nuestro silogismo:

Premisa 1: *Todos los perros son animales.*

Premisa 2: *Jackson es un animal.*

Conclusión: *Jackson es un perro.*

Este tipo de razonamiento no se puede considerar una inducción, pues parte de una regla general. ¿Es un razonamiento válido? ¿La certitud de las dos premisas aseguran la veracidad de la conclusión? La respuesta claramente es no. Si cambiamos la redacción del razonamiento a:

Jackson es un animal; todos los perros son animales, entonces es posible que Jackson sea un perro.

El conocimiento que puede llevarnos a la validez de la conclusión no se encuentra en las premisas. Habría que buscarlo en otra parte. En este caso una simple inspección del animal podría sacarnos de la duda.

A este tipo de razonamiento, Charles Sanders Peirce, filósofo pragmático estadounidense, llamó razonamiento abductivo. Lo expresó de la siguiente manera (Peirce, citado en Psilos 2011, p. 132):

Se observa un hecho sorprendente C.

Pero si A fuera cierto, C se estaría observando.

Entonces existe razón para pensar que A es cierto.

En nuestro caso el hecho observado es que *Jackson es un animal. Si Jackson fuera perro, tendríamos que Jackson es animal. Entonces existe razón para pensar que Jackson sea un perro.*

Así pues, mientras que en los razonamientos deductivo e inductivo la validación de la conclusión está en las mismas premisas, en el razonamiento abductivo hay que buscarla en otro lado.

En el ámbito de la matemática un razonamiento abductivo sería el siguiente.

> *Este triángulo tiene la propiedad de que la suma del cuadrado de la longitud de dos de sus lados es igual al cuadrado de la longitud del tercero* (hecho observado). *Yo sé que los triángulos rectángulos cumplen con esta propiedad* (regla general)*, entonces es posible que este triángulo sea rectángulo* (conjetura).

Coincidimos con Peirce (2014) y otros autores (Anderson, 1995; Douglas, 1995; Fann, 1970; Reichertz, 2010; Russell, 1965) en que este tipo de razonamiento lleva a una indagación con razonamientos de tipo deductivo e inductivo que nace de probar la validez de la conjetura y generalizarla. En este caso la pregunta que nos haríamos es: ¿será, entonces, que todos los triángulos que tengan esta relación entre la longitud de sus lados sean rectángulos? Si tomamos esto como cierto, ¿cuáles serían las consecuencias? ¿Qué se puede deducir de esto?

¿Cómo podemos probar la hipótesis? Lo primero que se puede hacer es ver si el triángulo observado y otros con la misma característica cumplen con el hecho de ser rectángulos. Cuando se tienen casos suficientes como para estar seguros de que la regla general se cumple, entonces se buscaría una cadena de razonamientos deductivos (cuyas premisas están sustentadas por la teoría matemática) que lleven a la conjetura como conclusión.

La indagación científica

Tomando en cuenta lo dicho hasta este momento, un razonamiento de tipo abductivo es el primer paso en un proceso de pensamiento reflexivo y, por ende, de un proceso de indagación científica. Peirce reconoce tres etapas de la indagación científica (adaptado de Psillos, 2011, pp. 143-144; traducción propia).

> *La completa serie de desempeños mentales entre la observación del maravilloso fenómeno y la aceptación de la hipótesis, … y la estimación final de su plausibilidad, considero que es* **la primera etapa** *de la indagación. Su fórmula característica de razonamiento la llamo abducción* (retroducción en el texto original)*, es decir del consecuente al antecedente.*
>
> *La abducción no permite seguridad. La hipótesis debe ser probada. Esta prueba, para que sea lógicamente válida, debe honestamente iniciar, no como inicia una abducción, con el escrutinio del fenómeno, sino con el examen de la hipótesis, y exhibir toda suerte de consecuencias condicionales que se*

> *seguirían de su veracidad. Esto constituye la* ***segunda etapa*** *de la indagación. Por su forma característica de razonamiento, nuestra sociedad le ha proporcionado el nombre de deducción.*
>
> *Una vez que el propósito de la deducción, el recabar consecuentes de la hipótesis, es llevado a cabo de manera suficiente, la indagación entra en su* ***tercera etapa****, la de establecer qué tan lejos tales consecuentes concuerdan con la experiencia, y de juzgar en consecuencia si la hipótesis es sensiblemente correcta o requiere alguna modificación no esencial, o debe ser completamente rechazada. Su forma característica de razonamiento es la inducción.*

El desarrollo de la ciencia está lleno de ejemplos de razonamiento abductivo que lleva al planteamiento de una conjetura o hipótesis y a la búsqueda de su aceptación completa bajo ciertas circunstancias o su completo rechazo.

Un ejemplo de esto es la evolución del concepto de átomo, desde las consideraciones filosóficas de Demócrito, hasta el modelo atómico de Schrödinger. Todo apunta a un proceso que aún no termina.

Según la versión más aceptada (Enciclopedia de Filosofía de Stanford, 2004), Parménides afirmaba que no podía haber un cambio sin que implicara que algo viniera de la nada; y como la idea de que algo viniera de la nada es algo que se tenía por imposible, entonces decía que el cambio era ilusorio. Pero los cambios están ahí, se pueden testificar diariamente, por tanto, negar el hecho no era la solución. En consecuencia, varios filósofos, entre ellos Demócrito y su maestro Leucipo de Mileto, se dieron a la tarea de buscar una explicación alternativa sobre las causas del cambio.

Podemos poner el razonamiento de Parménides como una abducción de la siguiente manera:

> *Se observa un cambio en la materia. Si algo surgiera de la nada, estaríamos observando cambios; por tanto, es posible que algo surja de la nada.*

Parménides no avanza mucho en su razonamiento, el siguiente paso fue negar el hecho observado (el movimiento es ilusorio), en lugar de tratar de probar su conjetura: *hay cosas que surgen de la nada*; o dado el caso, cambiarla.

Por su parte, el razonamiento de Demócrito se puede establecer como:

> *Se observa un cambio en la materia. Si hubiera principios constitutivos de la materia que no percibimos, estaríamos observando los cambios. Por tanto, es posible que existan esos principios.*

Y en lugar de negar lo observado, lo que hizo fue tratar de probar su conjetura suponiendo la existencia de bloques indivisibles de materia que al combinarse con otros bloques provocaban los cambios que sí podemos percibir. A estos bloques los llamó *átomos.*

La existencia misma de los átomos como una estructura indivisible era una conjetura, conjetura que retomó Newton, y modificó Dalton muchos siglos después para explicar los elementos químicos, dando a los átomos formas y tamaños diferentes. Es decir, la conjetura que suponía la existencia de los átomos, si no verdadera, resultó útil para explicar algunos fenómenos. A medida que avanzaba la tecnología y la ciencia fue evolucionando, el concepto de átomo perdió su característica de indivisible, el átomo está compuesto de partículas como electrones, neutrones, protones, muones y un número grande de otras partículas (partículas elementales). Pero, básicamente, la conjetura de Demócrito sigue vigente, ¿cuál es la estructura mínima e indivisible de la materia que origina los cambios que observamos? ¿Existen tales estructuras? Sabemos que la energía juega un papel fundamental en la conformación de la materia, y la luz tiene un comportamiento dual: como corpúsculo y como onda. Incluso tenemos una ecuación que relaciona la energía con la masa: $E = mc^2$; por tanto, es razonable creer que tal vez no exista dicha estructura y todo sea un intercambio entre materia y energía.

En la naturaleza, por lo menos hasta donde se conoce, la materia se encuentra en estado sólido, líquido, gaseoso o en forma de plasma. Y es posible tener conversiones entre estos estados. Entonces, es plausible pensar que, al final de cuentas, Aristóteles tuviera razón cuando argumentaba que la materia es un continuo y los cuatro elementos tierra (sólido), agua (líquido), aire (gas) y fuego (plasma) comparten algunas características.

El punto por resaltar, con todo lo anterior, es que el razonamiento abductivo puede embarcarnos en un proceso de reflexión y de formación de conjeturas que, eventualmente, nos llevaría al conocimiento, o a destinos insospechados como la poesía, que es el caso de Edgar Alan Poe con su texto Eureka, escrito en 1847.

Pensamiento matemático e investigación científica

En geometría, un ejercicio escolar típico es el siguiente:

> *Si tenemos dos segmentos de diferente longitud que se cruzan en su punto medio, el cuadrilátero que se forma con los extremos de los segmentos es un paralelogramo. ¿Es válida la afirmación anterior? Explica por qué sí o por qué no.*

Al resolver este ejercicio un profesor de matemática de bachillerato (en México: tres últimos años antes de iniciar la universidad) respondió de la siguiente manera:

> *Sí es un paralelogramo, pues en un paralelogramo sus ángulos internos miden lo mismo y sus diagonales se cruzan en su punto medio.*

¿Es correcto este razonamiento?

Si planteamos la afirmación como un razonamiento abductivo, quedaría así:

> *Hecho observado: Dos segmentos que se cruzan en su punto medio.*
>
> *Si todos los cuadriláteros cuyas diagonales se cruzan en su punto medio fueran paralelogramos, entonces es posible que estos dos segmentos sean*

las diagonales de un paralelogramo.

La conjetura que hay que revisar sería:

Todos los cuadriláteros con diagonales que se cruzan en su punto medio son paralelogramos.

Y no como lo pone el profesor del ejemplo:

Todos los paralelogramos tienen diagonales que se cruzan en su punto medio.

Es decir, el razonamiento abductivo nos ayudaría a plantear la conjetura correcta.

Una vez que tenemos la conjetura correcta, para probarla podemos recurrir a procedimientos deductivos, es decir, considerar qué consecuencias tendremos de considerar que en el cuadrilátero sus diagonales se cruzan en su punto medio, y si estas consecuencias nos llevan al hecho de que el cuadrilátero es un paralelogramo.

Como en el caso del átomo, es posible que el razonamiento abductivo lleve a un proceso de validación y refutación de conjeturas que tome años, décadas e, incluso, siglos.

Tomemos, por ejemplo, el caso de la fórmula de Euler que relaciona el número de vértices, aristas y caras de un poliedro regular: V – A = C + 2, en la que V es el número de vértices, A el número de aristas y C el número de caras.

El problema original fue la clasificación de los poliedros por parte de Euler, en 1758 (adaptado de Lakatos, 1963, p. 6):

Mientras que la clasificación de polígonos en geometría plana puede hacerse con facilidad de acuerdo con el número de sus lados, que siempre es igual al número de sus ángulos, en estereotomía la clasificación de poliedros representa un problema mucho más difícil, ya que el solo número de caras resulta insuficiente para este propósito.

Según Lakatos, la línea de pensamiento del matemático fue: si pudiera establecer una relación entre los elementos de un poliedro, como en el caso de los polígonos, sería fácil hacer la clasificación. El razonamiento que se vislumbra en el argumento de Euler es de tipo abductivo:

Si se pudieran clasificar los poliedros, tendríamos una relación entre sus elementos. Tengo una relación entre sus elementos, entonces es posible que se puedan clasificar.

El hecho observado es la relación entre los elementos del poliedro, y la conjetura es que los poliedros se pueden clasificar. La cuestión está en que Euler no tenía la relación, supone que existe por la correspondencia entre polígonos y poliedros. A diferencia de Parménides que negó el hecho, Euler supone que existe y se abocó a encontrarlo.

La fórmula que encontró, de hecho, fue otra conjetura que requería demostración: esta conjetura tuvo una serie de demostraciones y refutaciones que llevaron varias décadas (Lakatos, 1963).

En términos generales, podemos concluir que la matemática se ve sometida al escrutinio de las leyes de la inferencia y su conocimiento no se produce exclusivamente con razonamientos de tipos inductivo y deductivo. Sin embargo, debido a las características de la teoría matemática y la forma en que se construye, el pensamiento reflexivo en matemática (pensamiento matemático) da un carácter más riguroso al quehacer científico en general.

La matemática ha impactado todos los ámbitos del quehacer humano. No obstante, parece ser que el pensamiento matemático no ha tenido el mismo impacto.

Veamos el siguiente ejemplo:

La Figura 1 fue tomada de la revista Annals of Applied Biology.

La gráfica A muestra la tendencia de la permanencia de frutos de longan (también conocido como 'ojo de dragón'), una fruta tropical asiática parecida al lichi. Parte de la explicación que se da en el artículo sobre la gráfica A es como sigue (traducción propia)

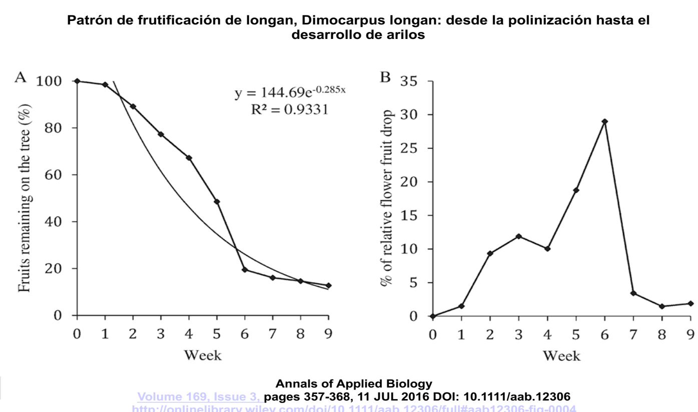


Figura 1. Permanencia de frutos de *longan*.

> *Las flores o los frutos caen de 1 a 9 semanas después de la floración, siguiendo una tendencia exponencial (R^2 = 0.9331), según la ecuación $y = 144.69e^{-0.285x}$, en la que 'x' significa semanas después de la antesis.* (Pham, et al, 2016: 363)

Si analizamos la información que se da en la gráfica y lo transcrito en el párrafo anterior, podemos observar lo siguiente: suponemos que la gráfica con puntos corresponde a las observaciones de campo (en el artículo no se menciona este hecho), éstas se hicieron semanalmente, en consecuencia, los puntos no deberían estar unidos por segmentos pues no se sabe qué sucede entre una medición y otra (éste es un ejemplo de gráfica discreta). Ahora bien, teniendo una gráfica de puntos como la de la figura, ¿qué fue lo que llevó a los autores a pensar en un ajuste exponencial? El coeficiente R^2 es alto, por tanto, la curva debería pasar muy cerca de los puntos, cosa que no se observa en la gráfica. Esto haría pensar en que se haya cometido algún error en el cálculo de R^2. Ahora bien, el artículo está publicado en una revista arbitrada, ¿faltó rigurosidad a los revisores o simplemente no les pareció importante?

Situaciones como la anterior se deben a la falta de un pensamiento matemático en las líneas de razonamiento de los autores. ¿Habrían cambiado los resultados y, por ende, las conclusiones de haber sido más rigurosos en el uso de herramientas matemáticas? ¿Qué tan útiles son las gráficas en el artículo o sólo tienen la función de darle un carácter más *científico* al texto?

ARGUMENTACIÓN Y VALIDACIÓN DE CONJETURAS

La creación de conocimiento y su validación es una actividad social que involucra, en primer término, a la comunidad interesada en tal conocimiento como se evidenció en la sección anterior. En el caso de la matemática, un cierto conocimiento es validado por la comunidad de matemáticos interesados en él; en su caso, son también los encargados de rechazarlo o de poner en duda su validez.

En este proceso de creación y de validación, la argumentación juega un papel central; entenderemos por **argumentación** la serie de razonamientos o hechos encaminados a justificar un resultado, o con el propósito de persuadir a otros de su validez. A cada uno de tales razonamientos o hechos se le llamará **argumento**; al proceso de poner en juego una argumentación lo llamaremos **práctica argumentativa**. Finalmente, diremos que un resultado o una conclusión que no ha sido validada o justificada es una **conjetura**.

En la vida cotidiana se producen innumerables situaciones en las que la argumentación se pone en juego. Por ejemplo, tenemos el siguiente correo electrónico recibido por un profesor:

> "*Buenas noches profesor, me comunico con usted por este medio ya que tengo duda con mi promedio, me pareció que entregué todos los trabajos y casi no tuve inasistencias, por lo cual tengo inconformidad con el 8 que me asignó. Creo que sólo me faltó una evaluación, pero el día anterior había fallecido mi abuelita y no pude asistir. Espero su respuesta, gracias*"

Aquí, la argumentación tiene el objetivo de manifestar inconformidad con una nota final y, de manera implícita, solicitar un aumento en la calificación; el estudiante está poniendo en juego una *práctica argumentativa*. Lo primero que llama la atención de este escrito, es la oración que viene justo después del saludo: "…me comunico con usted por este medio ya que tengo duda con mi promedio…" ¿Quiere decir que, si no tuviera duda de su promedio, se comunicaría por otro medio? Pero analicemos más de cerca su argumentación.

Los hechos que utiliza para apoyar sus afirmaciones, y pedir, implícitamente, un aumento de calificación, son: *Entregué todos mis trabajos* y *Casi no tuve inasistencias.* Un argumento que utiliza para fortalecer su conclusión (el 8 no es justo), es la alusión a la muerte de la abuela.

En general, en una argumentación es posible detectar ciertos elementos básicos que la constituyen:

a) Información o datos (D) que llevan a una conclusión o a una tesis (a esta información también se le conoce como hipótesis).

b) La conclusión o tesis misma (T).

c) Argumentos (G) que garantizan el paso de la información inicial a la conclusión (a estos argumentos les llamaremos Garante).

d) Argumentos adicionales (S) que sustentan a los argumentos de garantía (que llamaremos Sustento).

e) Un calificador modal (M) que indica la fortaleza de una posible refutación de la conclusión, o las condiciones para que se dé.

f) Argumento o argumentos que refutan (R) o impugnan la conclusión.

Estos elementos se pueden representar en un diagrama que ayuda a analizar la argumentación, el diagrama se conoce como Esquema de Toulmin (Figura 2)

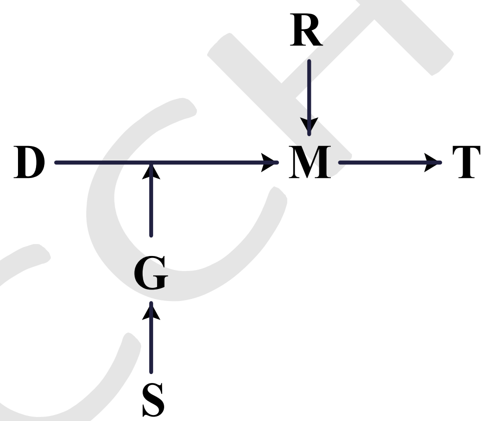


Figura 2. Esquema de Toulmin.

El diagrama se podría describir de la siguiente forma: Se tiene información o datos (D) que, dependiendo del calificador modal (M), llevan a una cierta conclusión o tesis (T). El calificador modal nos indica qué tan fuerte es la posible refutación (R) o en qué condiciones se puede dar dicha refutación. Mientras que los datos tienen argumentos (G) que garantizan la validez de la tesis. Este garante, a su vez, está respaldado por argumentos que la sustentan (S).

Al analizar la argumentación del ejemplo tendremos lo siguiente:

T: Inconformidad con el 8 asignado.

D: *Entregué todos los trabajos, casi no tuve inasistencias* y *sólo me faltó una evaluación.*

M: *Me pareció que; creo que.*

G: *Sólo falté en una ocasión* (esto está implícito en la argumentación)

S: *El día anterior había fallecido mi abuelita.*

R: No entregó todos los trabajos ni estuvo en todas las evaluaciones.

Los calificadores modales tienen fuerza suficiente para dar pie a las refutaciones y esto hace que la tesis o conclusión sean bastante débiles, por tanto, podemos calificar su argumentación como una *falacia.*

En términos generales, podemos considerar una falacia como el tipo de argumentación que lleva a aceptar o descartar una conclusión debido a argumentos inapropiados o débiles (fácilmente refutables).

Ahora bien, en contextos no científicos es posible usar argumentaciones incompletas o sesgadas que pretenden desviar la atención de hechos que podrían ser más relevantes; en el ejemplo presentado no se hace referencia al conocimiento adquirido durante el curso o al desempeño cognitivo del estudiante, aspectos que podrían ser más relevantes que la mera entrega de trabajos y la asistencia a clases. La falta de este tipo de consideraciones debilita la argumentación.

Lo anterior nos indica que una argumentación adquiere características especiales dependiendo del campo de conocimiento en el que se dé (esto se conoce como *dependencia de campo* de la argumentación), sin embargo, es posible analizar una argumentación usando el esquema de Toulmin y determinar su validez.

Usemos este esquema para analizar el siguiente texto, tomado de un artículo académico sobre argumentación jurídica; en él se quiere convencer al lector de la utilidad de usar los planteamientos de Toulmin.

> *La teoría de este autor es una de las más prácticas en cuanto enseña cómo construir un argumento y se puede aplicar tanto en la motivación judicial como en la argumentación de los litigantes, porque señala que en un argumento se distinguen cuatro elementos:*
>
> - *La pretensión, es el punto de partida como el punto del destino de nuestro proceder en la argumentación.*
> - *Las razones son motivos a favor de su pretensión que sean relevantes y suficientes, son los hechos específicos del caso.*
> - *La garantía, son reglas, principios, enunciados generales, definiciones o máximas de la experiencia que permiten o autorizan el paso de las razones a la pretensión, y se pueden expresar mediante juicios hipotéticos mediante la fórmula "si…entonces" la distinción entre razones y garantía es la misma entre enunciados de hecho y norma.*
> - *El respaldo puede expresarse en la forma de proposición categórica sobre hechos, muestras de qué manera se puede argumentar a partir de tales hechos. Son las normas, las tesis, los principios y garantías individuales.*

En la argumentación podemos hallar los elementos que la componen y usar el mismo esquema para evaluar su validez:

a) La tesis o conclusión (T) es: "La teoría de este autor es una de las más prácticas".
b) Los datos o la información (D) que llevan a la tesis serían: "enseña cómo construir un argumento y se puede aplicar tanto en la motivación judicial como en la argumentación de los litigantes".
c) La garantía (G) que avala el paso de la información inicial a la tesis es: "señala que en un argumento se distinguen cuatro elementos"
d) Y el sustento (S) de la garantía podrían ser los elementos mencionados.

En este caso no hay un calificador modal explícito que dé entrada a una posible refutación. ¿Es posible encontrar un calificador modal y una refutación para la conclusión? Recuérdese que se trata de establecer la validez de la argumentación, no de establecer o refutar la validez de la conclusión; esto es, ¿la argumentación es válida?

Según el esquema de Toulmin, podemos parafrasear la argumentación de la siguiente manera:

> *Dado que enseña cómo construir un argumento y se puede aplicar tanto en la motivación judicial como en la argumentación de los litigantes (D), la teoría de este autor es una de las más prácticas (T); porque señala que en un argumento se distinguen cuatro elementos (G) que se enuncian como sigue… (S). A menos que (M) la practicidad de la teoría no se vea reflejada en los elementos (R).*

Para establecer si se puede llegar a la conclusión a partir de los datos, sería necesario iniciar una argumentación sobre si los elementos señalados determinan lo práctico de la teoría. Si la respuesta es negativa, entonces podríamos cambiar el calificador modal (M) por "sólo que" y la refutación (R), por "*la practicidad de la teoría no se ve reflejada en los elementos de referencia*". En este caso estaríamos de nuevo ante una falacia.

El problema con la anterior argumentación es que lo que se usa como garante es parte de la premisa y esto invalida la argumentación. Si se reconstruye la argumentación de la siguiente manera es posible evitar la falacia:

> *La teoría de este autor enseña cómo construir un argumento a través de cuatro elementos:*
>
> - *La pretensión, es el punto de partida como el punto del destino de nuestro proceder en la argumentación.*
> - *Las razones son motivos a favor de su pretensión que sean relevantes y suficientes, son los hechos específicos del caso.*
> - *La garantía, son reglas, principios, enunciados generales, definiciones o máximas de la experiencia que permiten o autorizan el paso de las razones a la pretensión, y se pueden expresar mediante juicios hipotéticos mediante la fórmula "si…entonces" la distinción entre razones y garantía es la misma entre enunciados de hecho y norma.*
> - *El respaldo puede expresarse en la forma de proposición categórica sobre hechos, muestras de qué manera se puede argumentar a partir de tales hechos. Son las normas, las tesis, los principios y garantías individuales.*
>
> *Por tanto, es una de las más prácticas ya que se puede aplicar tanto en la motivación judicial como en la argumentación de los litigantes.*

Puesta así, la conclusión "es una de las más prácticas", tiene como garante el hecho de que "se puede aplicar tanto en motivación judicial como en la argumentación de los litigantes". No ofrece un sustento, pero quizá no sea necesario.

ARGUMENTACIÓN EN MATEMÁTICA

Como se dijo, las características de la argumentación van a depender del campo de conocimiento en donde se dé. Para ilustrar cómo se da la argumentación en una tarea matemática veamos algunos ejemplos de geometría.

Regresemos al ejemplo del cuadrilátero y sus diagonales:

> *Si se tiene que las diagonales de un cuadrilátero se cortan en su punto medio, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.*

Podemos considerar la proposición anterior como parte de una argumentación, se tienen los datos o la información inicial (que en matemática llamaremos hipótesis), “cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en su punto medio”, que nos llevan a una conclusión, “el cuadrilátero es paralelogramo”. Y el ejercicio pide completar la argumentación.

Analicemos la respuesta del profesor usando el diagrama de Toulmin:

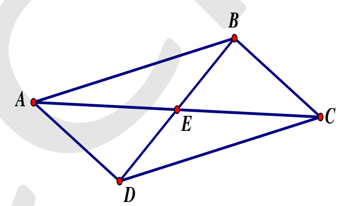


Figura 3. Las diagonales de un paralelogramo.

La proposición es verdadera porque en un paralelogramo los lados opuestos tienen la misma longitud y se puede demostrar [matemáticamente] *que sus diagonales también tienen la misma longitud y forman triángulos opuestos congruentes. Como se muestra en la figura* [Figura 3]*. Es fácil demostrar que el segmento BE tiene la misma longitud que el segmento ED y lo mismo sucede con los segmentos AE y EC, por tanto, el punto E es punto medio de ambas diagonales. Es decir, si las diagonales se cortan en su punto medio, se trata de un paralelogramo.*

Al examinar los argumentos individuales dados por el profesor nos daremos cuenta de que lo que dice es correcto desde el punto de vista geométrico, sin embargo, su argumentación es una falacia, es decir no está bien construida. Tal vez, de entrada, no sea tan fácil determinar en dónde está el fallo en la argumentación.

El primer fallo está en decir que las diagonales de un paralelogramo tienen la misma longitud, dando a entender que son congruentes entre sí. Esto es cierto para los rectángulos, un tipo especial de paralelogramo, pero no en general. Si recurrimos al diagrama de Toulmin la falla se hace evidente (Figura 4).

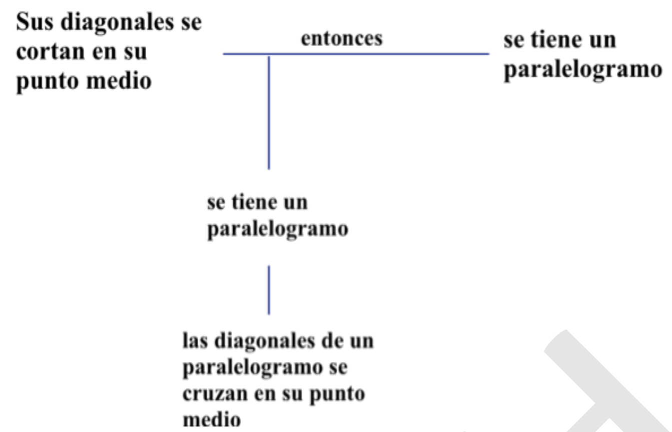


Figura 4. Diagrama de Toulmin del ejercicio de geometría.

En su argumentación, el profesor está usando como garantía la tesis misma. Es decir, no está usando los datos de entrada (la hipótesis) para llegar a la conclusión (tesis). El profesor no usa nunca el hecho de que las diagonales sean congruentes entre sí, lo que lleva a la conclusión de que esta característica no es necesaria para llegar a la conclusión.

¿Cómo es esto? Si yo tengo un paralelogramo, entonces es seguro que sus diagonales se cortan en su punto medio, pero es posible que los paralelogramos no sean los únicos cuadriláteros con esta propiedad. Por tanto, se deben usar otros argumentos como garantía. El argumento debe iniciar con dos segmentos, no necesariamente de la misma longitud, que se cortan en su punto medio (Figura 4). Y preguntarnos si los extremos de tales segmentos forman un paralelogramo.

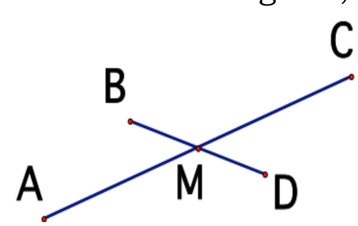


Figura 5. Diagonales que se cortan en su punto medio.

En el caso de la Figura 5, para que los cuatro puntos *A, B, C* y *D* formen un cuadrilátero, entonces deben formar segmentos opuestos (AB y CD; BC y AD) paralelos entre sí, ésta es la definición de paralelogramo: un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos entre sí. Usando un lenguaje matemático, lo anterior quedaría:

$$AB \,||\, CD \ y \ BC \,||\, AD$$

Es decir, el segmento AB es paralelo al segmento CD, y el segmento BC es paralelo al AD. Así pues, nuestra argumentación debe llevarnos del hecho de que M es punto medio de ambos segmentos a la conclusión de que A, B, C y D forman un paralelogramo.

El diagrama de Toulmin quedaría como se muestra en la Figura 6.

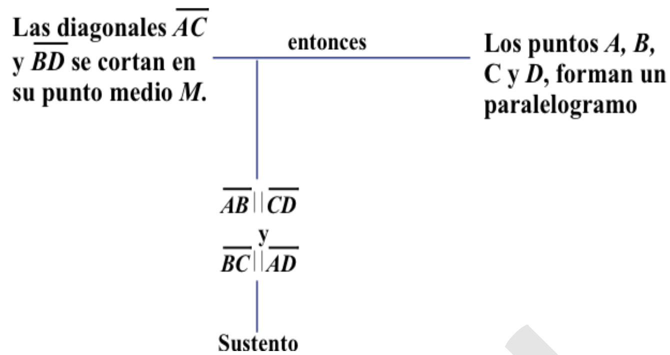


Figura 6. Diagrama de Toulmin de la argumentación sobre paralelogramos.

En esta nueva argumentación la garantía es que los lados opuestos son paralelos; y el sustento de la garantía es otra argumentación que inicia con dos segmentos que se cruzan en su punto medio y concluye con la garantía. ¿Cómo se puede demostrar esto?

En este punto podemos tomar el ejemplo que nos ocupa para ilustrar cómo se construye la matemática. Para ver si nuestra argumentación es válida, podemos pensar en el ejercicio como la validación de una conjetura:

> "*Si las diagonales de un cuadrilátero se cruzan en su punto medio, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo*"

Al analizar la forma en que se podría demostrar esta conjetura, llegamos a otro enunciado:

> "*Si dos segmentos de recta se cortan en su punto medio, entonces los extremos de los segmentos forman un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos entre sí.*"

Este enunciado, si no ha sido validado matemáticamente, es decir, si tiene el estatus de conjetura, debe ser validado para que pueda fungir como garantía y sustento de la argumentación original. Lo anterior nos lleva a afirmar que, en la argumentación matemática, un teorema puede fungir como garante de nuestra argumentación, y no necesita sustento (si lo necesitara, entonces no sería teorema, sino conjetura).

Tenemos, también, que, si la argumentación se apoya en un teorema como garante, y el teorema está bien aplicado, no habrá calificadores modales ni refutaciones.

Analicemos las siguientes argumentaciones que corresponden a un mismo ejercicio de geometría.

El ejercicio es el siguiente:

> *Considera un cuadrado cualquiera y sus diagonales. ¿Cómo son entre sí los triángulos que se forman con la intersección de las diagonales y los vértices del cuadrado? Explica tu respuesta.*

La respuesta es que los triángulos son congruentes entre sí. La argumentación se puede parafrasear de la siguiente manera:

Si se tiene un cuadrado y sus dos diagonales, entonces los cuatro triángulos internos que se forman son congruentes entre sí.

Analicemos dos de las explicaciones que dieron estudiantes de Bachillerato.

Explicación 1:

> *Tenemos que los lados adyacentes son congruentes y perpendiculares. Al trazar una diagonal, el triángulo que se forma con los lados del cuadrado es isósceles y como el ángulo opuesto a la diagonal es recto, los otros dos ángulos son de 45°, por tanto, los ángulos que forman las diagonales con los lados son de 45°. Como los lados del cuadrado son congruentes, entonces, aplicando el criterio de congruencia A-L-A, concluimos que los triángulos en cuestión son también congruentes.*

Según esta explicación, el garante es el criterio ángulo-lado-ángulo. Toda la argumentación que se da gira en torno a explicar por qué se puede aplicar este criterio.

Un posible calificador modal podría ser la correcta aplicación del criterio. Por lo que el análisis se debería centrar en cómo se argumenta la aplicación de tal criterio. El diagrama de Toulmin quedaría como se muestra en la Figura 7.

Figura 7. Esquema para la Explicación 1 del problema de los triángulos en un cuadrado.

Vista de esta manera, la validez de la argumentación depende del sustento, que es, a su vez, una argumentación sobre la aplicación del criterio. Retomando el razonamiento que se da en la explicación tendríamos lo siguiente:

El criterio A-L-A, que se considera como un teorema, dice que dos triángulos son congruentes si dos ángulos de uno son congruentes con dos ángulos del otro y, además, el lado que comparten en un triángulo es congruente con el lado que comparten en el otro (Figura 8).

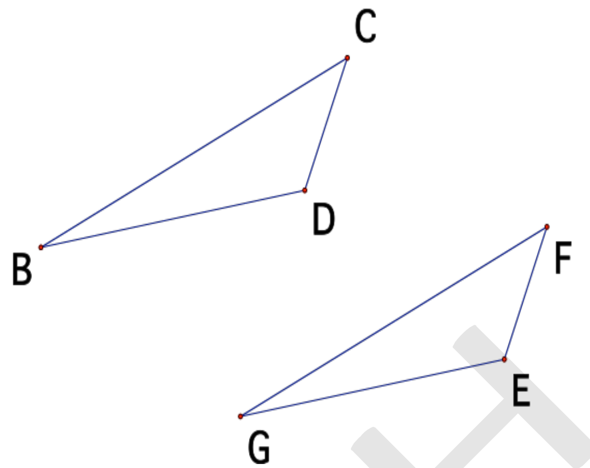


Figura 8. El triángulo BCD es congruente con el GFE.

Según la figura, si $\angle B = \angle G$, $\angle D = \angle E$[1] y $BD = GE$, entonces los triángulos *BCD* y *GFE* son congruentes (es decir, lados y ángulos correspondientes de uno y otro triángulo tienen las mismas medidas).

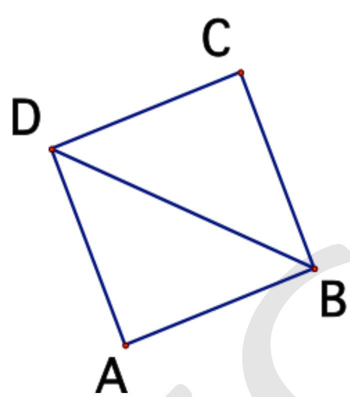


Figura 9. Cuadrado y una de sus diagonales

Ahora bien, lo primero que hace el estudiante es dividir el cuadrado en dos triángulos usando una de sus diagonales (Figura 9).

Como los lados adyacentes del cuadrado son congruentes y perpendiculares entre sí, entonces la diagonal forma dos triángulos rectángulos isósceles. En el caso de la Figura, tenemos que ΔADB y ΔCBD, son isósceles. Además, $\angle ADB = \angle DBA = 45°$, puesto que $\angle A$ es recto y la suma de los tres debe dar 180°.

Haciendo el mismo razonamiento con la otra diagonal, concluye que éstas forman ángulos de 45° con respecto a los lados del cuadrado. Y si todos los ángulos son de 45°, y los lados del cuadrado son congruentes entre sí, es inmediata la aplicación del criterio A-L-A a triángulos adyacentes y concluir la congruencia de todos ellos.

Por consiguiente, podemos concluir que la aplicación del criterio es correcta y la argumentación válida.

¿Qué sucede con la segunda explicación?

Explicación 2:

[1] $\angle A$ significa el ángulo interior del polígono en el vértice A. En caso de que haya ambigüedad, se escribirá $\angle BAC$ para indicar que se trata del ángulo formado por los puntos *B, A* y *C*, siendo *A* el vértice del ángulo.

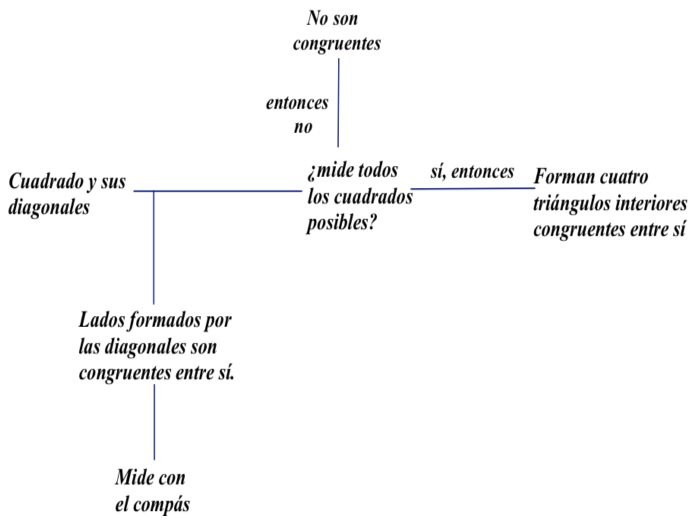


Figura 10. Diagrama de Toulmin para la segunda explicación.

Los cuatro triángulos son congruentes porque si trazo una circunferencia con centro en el punto de intersección de las diagonales y que pase por uno de los vértices, entonces pasará por los otros vértices; y como los lados del cuadrado son congruentes, entonces los triángulos también lo son.

El diagrama de Toulmin correspondiente a la argumentación se muestra en la Figura 10.

El garante de su tesis es que los triángulos interiores del cuadrado son isósceles cuyos lados congruentes son todos congruentes entre sí. Si esto es cierto, y aunado con el hecho de que los lados del cuadrado son congruentes, podemos concluir la validez de la tesis. Para sustentar su garante, el estudiante midió los lados de los triángulos con un compás, corroborando que son radios de un mismo círculo y, por tanto, congruentes. Podemos concluir que el procedimiento es correcto.

Sin embargo, en matemática toda conjetura se debe validar de manera que no haya dudas de su validez. Es decir, debe ser cierta para todos los casos posibles: si no se cumple en uno solo, entonces la conjetura no es válida y no puede acceder al estatus de teorema. En el caso que nos atañe, la medición se hizo con un cuadrado y la validez de la argumentación se aplicaría para ese cuadrado, para tener certeza de que es válida para cualquier cuadrado, habría que medirlos todos, pues si uno solo no cumple, la conjetura no es válida: está claro que medir una cantidad infinita de cuadrados es una labor imposible.

En consecuencia, la argumentación no es válida desde el punto de vista de la matemática. Éste es un ejemplo de que la argumentación depende del campo de conocimiento en la que se haga: es necesario apegarse a las reglas de operación de la matemática para hacer un correcto análisis de la argumentación.

ESQUEMAS DE ARGUMENTACIÓN EN MATEMÁTICA

Como conclusión de la sección anterior, afirmamos que para que una argumentación matemática no sea una falacia, es necesario que la práctica argumentativa se ciña a las reglas de operación de la matemática. Es decir, la manera en la que se construye el conocimiento matemático.

Definiciones, axiomas, conjeturas y teoremas

Sin temor a equivocarnos, diremos que la matemática es constructivista, en el sentido de que se va construyendo a partir de conceptos básicos y las relaciones entre éstos. Así, toda teoría matemática inicia con la definición de sus conceptos básicos y las relaciones que hay entre ellos; estas relaciones pueden ser obvias o, por acuerdo de la comunidad, considerarse como verdaderas. A tales relaciones les llamaremos axiomas (en algunos textos se usan términos como postulados o leyes). Por tanto,

> *una **definición** es la descripción detallada y sin ambigüedades de un objeto matemático de manera que no pueda confundirse con otro; es decir, el objeto matemático es caracterizado a través de aquellas propiedades que le son totalmente inherentes.*

Hay algunos objetos matemáticos, como el punto, por ejemplo, cuya definición es difícil de establecer y que, sin embargo, no da lugar a confusiones.

Mientras que

> *un **axioma** será una afirmación acerca de un objeto matemático o de la relación entre objetos matemáticos que se considera verdadera o válida, ya sea por su obviedad o por consenso en la comunidad matemática.*

Por ejemplo, podemos decir que un número entero cualquiera, a, siempre será igual, menor o mayor que otro número b. Es decir, si tenemos dos números a y b, se cumple que

$$a = b, a < b \text{ o } a > b$$

Axioma que se conoce como principio de tricotomía de los números.

Ahora bien, existen afirmaciones sobre objetos matemáticos o relaciones entre éstos que no son tan obvias (que llamaremos proposiciones), pero que se pueden deducir de los axiomas y de las definiciones; para establecer la validez o la veracidad de tales afirmaciones es necesario que la deducción se apegue estrictamente a las leyes de la lógica. A estas relaciones se les llama teoremas, lemas o corolarios.

Así,

> *un **teorema** es una proposición o afirmación matemática cuya validez fue establecida a partir de axiomas o de otros teoremas o de una combinación de ambos.*

Por lo general se da el rango de teorema a resultados que son considerados importantes en matemática.

> *Un **lema** es un resultado matemáticamente válido que se usa en el proceso de establecer la validez de un teorema.*

Por su parte,

> *un **corolario** es un resultado inmediato de un teorema.*

Algo que tienen en común *teoremas*, *lemas* y *corolarios* es que fueron validados a través de una prueba o demostración matemática; es decir, mediante una argumentación que descansa totalmente en procesos deductivos.

La distinción entre teorema, lema y corolario es relativa, pues muchos teoremas son corolarios de otros y también sirven como lemas para demostrar otros teoremas.

Mientras una proposición no haya sido demostrada matemáticamente, tiene el estatus de ***conjetura***. Y una conjetura que ha sido demostrada adquiere el rango de teorema, que puede utilizarse para demostrar otras conjeturas.

Para ilustrar lo anterior, retomemos los dos ejemplos de geometría representados en las Figuras 1.5 y 1.7.

Consideremos el diagrama de la Figura 1.5. La conjetura por demostrar es:

> *C1. Si en un cuadrilátero las diagonales se cruzan en su punto medio, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.*

Para su demostración se hace uso de otra conjetura:

> *C2. Si dos segmentos de recta se cortan en su punto medio, entonces los extremos de los segmentos forman un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos entre sí.*

Si se demuestra *C2*, entonces se le puede usar como lema. A su vez se pueden usar otros teoremas geométricos como lemas para demostrar *C2*; por ejemplo, que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Si cambiamos el orden de los resultados, podemos considerar primero la demostración de *C2*, una vez hecha la demostración se le puede considerar como teorema y, en este caso, *C1* sería consecuencia inmediata de dicho teorema y, por tanto, un corolario.

Con respecto al diagrama de la Figura 1.7, la conjetura se puede establecer como sigue:

> *En todo cuadrado, sus diagonales forman cuatro triángulos interiores congruentes entre sí.*

Su demostración descansa en el teorema conocido como Criterio de Congruencia Ángulo-Lado-Ángulo que sería un lema necesario para la demostración. El análisis del diagrama de Toulmin nos muestra que la argumentación está bien construida, por tanto, decimos que la conjetura es válida y es posible considerarla como teorema.

ESQUEMAS DE ARGUMENTACIÓN

Anteriormente definimos **argumentación** como el conjunto de actividades y razonamientos que una persona pone en juego cuando intenta justificar o explicar un hecho o un resultado, o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema. En esta sección nos referiremos a hechos, resultados y problemas dentro del ámbito de la matemática.

Así, un **esquema de argumentación** es el tipo de argumentación que un individuo utiliza durante una práctica argumentativa. Dependiendo del nivel en que se esté desempeñando, cuando una persona hace matemática y debe validar sus resultados o sus conjeturas recurre a los esquemas de argumentación.

Los esquemas más utilizados son cuatro: autoritarios, de recuento fáctico (o simplemente fácticos), empíricos y analíticos (Flores, 2006).

Un **esquema autoritario** es aquella argumentación que apela a una autoridad. Esta autoridad puede ser un matemático, un profesor o el autor de un libro, entre otros. Por lo general este tipo de esquemas adquieren una forma parecida a lo siguiente:

> *Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, esto es cierto (verdadero) porque viene en el libro de geometría que llevamos el semestre pasado (o porque lo demostró mi maestro durante una de las clases).*

En un diagrama de Toulmin, el hecho de estar en un libro o que lo haya demostrado un profesor es el garante. Para determinar la validez de la argumentación, tendríamos, entonces, que revisar lo que está en el libro o cómo lo demostró el profesor. Es decir, apelar a una autoridad no es suficiente para establecer la validez de la argumentación y, por ende, de la conjetura. En ocasiones se recurre a matemáticos famosos para validar una conjetura, por ejemplo, es verdad porque lo demostró Euler en su obra tal. Pero el criterio es el mismo, no importa el peso de la autoridad a la que se recurra.

El **esquema de recuento fáctico o factico** consiste en un recuento de los hechos que llevaron a la conclusión, como una serie de pasos que, en opinión del individuo que lo utiliza, son suficientes para justificar la validez del resultado.

Otro muy utilizado es el conocido como **esquema empírico**. En éste la validación recae en la apreciación empírica de la situación. Por ejemplo, lo que está en una ilustración: las rectas son perpendiculares como se aprecia en la figura. O los resultados de una medición: coloco la punta del compás en el centro del cuadrado y el otro extremo en un vértice, al girarlo percibimos que la punta pasa por los otros vértices…

Es posible que este tipo de razonamiento sea válido para la situación a la que se está refiriendo, pero no estamos seguros de que lo sea para todos los casos similares. Recodemos que una conjetura matemática debe ser válida para todas instancias en las que aparece, si no se cumple en una de ellas, la conjetura no es válida. Un ejemplo de esto es la argumentación representada en el diagrama de Toulmin de la Figura 1.10.

Los **esquemas analíticos** son aquellos cuyo razonamiento es completamente deductivo. Un razonamiento deductivo es aquel que nos lleva a una conclusión particular a partir de una más general. Por ejemplo:

> *El criterio de congruencia Ángulo-Lado-Ángulo se cumple para todas las parejas de triángulos congruentes. Estos dos triángulos cumplen con el criterio, entonces son congruentes.*

Lo anterior se puede escribir de la siguiente manera:

> Criterio A-L-A se cumple, entonces los triángulos son congruentes; ΔABC y ΔDEF cumplen con A-L-A, entonces son congruentes.

De forma aún más sintética podemos escribir:

$ALA \Rightarrow TC$	Regla general
$\Delta 1$ y $\Delta 2 \Rightarrow ALA$	Caso particular
$\Delta 1$ y $\Delta 2 = TC$	Resultado

ALA = Criterio de congruencia Ángulo-Lado-Angulo; $\Delta 1$ y $\Delta 2$ = Triángulos 1 y 2; TC = Triángulos Congruentes; y $\Rightarrow$ significa implicación.

Lo anterior se leería:

"El criterio ALA implica Triángulos Congruentes; Triángulos 1 y 2 implican Criterio ALA; entonces Triángulos 1 y 2 son Triángulos Congruentes." A este tipo de argumentación deductiva le llamaremos *silogismo*.

Debido al su carácter general y al hecho de que se sustenta exclusivamente en un razonamiento deductivo, los esquemas analíticos pueden llevarnos a construir una demostración matemática.

Como ejemplo de esquemas empírico y analítico veamos la siguiente situación.

> *Si en un cuadrilátero ABCD cualquiera se traza otro cuadrilátero usando los puntos medios de los lados de ABCD, ¿qué tipo de cuadrilátero se forma? Explica tu respuesta.* (Figura 1.11)

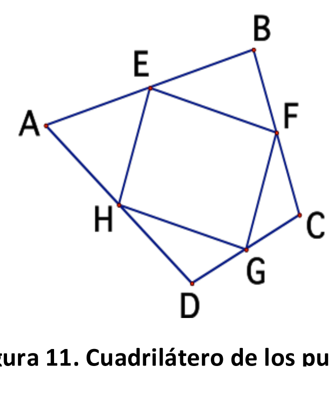


Figura 11. Cuadrilátero de los puntos

Supongamos que éste es un ejercicio que un profesor de Bachillerato puso a sus estudiantes. Para responder a la pregunta disponen de un software de geometría dinámica.

Consideremos el proceder de un cierto estudiante, lo llamaremos Estudiante G (EG):

Lo primero que hace EG es representar la situación en el software; obtiene una construcción como la que mostramos en la Figura 12:

Al analizar su construcción, el estudiante se da cuenta de que el cuadrilátero que se forma con los puntos medios (que llamaremos cuadrilátero de puntos medios) es un cuadrado o algo muy parecido. Entonces su primera conjetura es que se trata de un cuadrado. Pero al arrastrar los vértices del cuadrilátero original se da cuenta que no es precisamente un cuadrado, por lo que desecha su conjetura y la sustituye por otro: el cuadrilátero es un paralelogramo. Parece ser que esta conjetura sí se cumple pues en todos los casos que el estudiante revisa se cumple. Incluso en cuadriláteros cóncavos y en cuadriláteros cruzados (Figura 12). Para estar aún más seguro, EG mide la pendiente de los lados que supone paralelos y comprueba que siempre tienen la misma medida, sin importar qué tipo de cuadrilátero sea el original.

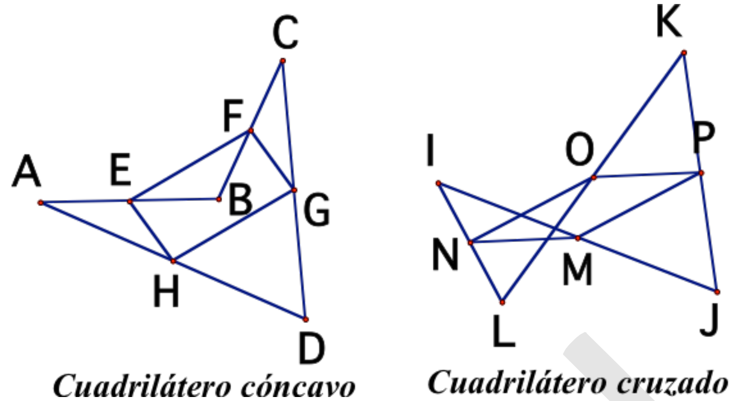


Figura 12. Cuadrilátero de puntos medios para cuadriláteros cóncavos y cruzados.

Con estas evidencias, EG concluye que efectivamente el cuadrilátero de los puntos medios es un paralelogramo, independientemente del tipo de cuadrilátero original.

Su explicación queda en los siguientes términos:

> *Si tenemos un cuadrilátero cualquiera, convexo, cóncavo o cruzado, su cuadrilátero de puntos medios siempre será un paralelogramo, pues al hacer la construcción y arrastrar los vértices del cuadrilátero original, el de puntos medios no pierde su condición de paralelogramo. Esto se confirma pues al medir la pendiente de los lados opuestos, siempre son iguales.*

El procedimiento que siguió EG para llegar a una conclusión es un proceso inductivo, es decir, a partir del análisis de casos particulares llega a una conclusión general. Y su conclusión se basa exclusivamente en lo que obtiene con el programa de geometría dinámica.

En este caso estamos frente a un esquema empírico basado completamente en figuras y la medición entre ellas. No hay procesos deductivos en esta argumentación. Si llegara a pasar que se encuentre un contraejemplo, entonces la argumentación sería una falacia.

Supongamos, ahora, que quien hace la exploración y se forma conjeturas es un matemático.

La exploración inicial iría más o menos en los mismos términos que EG, es decir, hace la construcción, se da cuenta de que puede ser un paralelogramo y plantea su conjetura. Explora un poco más para estar seguro, por lo general revisa los casos extremos y los que puedan ser problemáticos en busca de contraejemplos. Cuando se siente seguro de que su conjetura es cierta, entonces busca una manera de validarla basándose en teoremas y resultados válidos de la geometría.

Podría, por ejemplo, usar el teorema de Tales para demostrar que los lados opuestos son paralelos. Es decir, su argumentación se basaría en razonamientos deductivos que no dependen de la figura ni de mediciones. Es posible que se auxilie de la figura para plantear sus razonamientos, pero es sólo un auxiliar en la argumentación. En este caso tendríamos un esquema analítico.

La experiencia nos dice que los esquemas analíticos son los únicos que conducen a inferencias verdaderas y, por ende, a la demostración matemática. También nos indica que los esquemas empíricos pueden conducir a los analíticos.

IMPLICACIONES EN LA DIDÁCTICA

La escuela, como el centro de formación de los integrantes de una sociedad, se conforma en el lugar en donde se prepara a los aprendices para la vida. En palabras de Dewey (traducción propia):

> *La gran importancia del pensamiento para la vida hace necesario su control por parte de la educación, esto debido a su tendencia natural a perderse, y debido a que existen influencias sociales que tienden a formar hábitos de pensamiento que llevan a creencias inadecuadas y erróneas.* (Dewey, 1910: 29)

En especial, durante el proceso de formación científica (como mencioné al principio, incluyo en esta categoría a todos los ingenieros y los científicos sociales) es necesario que los aprendices adquieran hábitos y habilidades de pensamiento reflexivo que les permita llegar a inferencias mejor sustentadas. Es decir, la escuela debe proporcionar al estudiante una disciplina mental que convierta el talento natural de los individuos, a través de un ejercicio gradual, en un poder efectivo (Dewey, 1910):

> *Cuando la disciplina es concebida en términos intelectuales (como el poder habitual de una actividad mental efectiva), se le identifica con la libertad en su sentido verdadero. Ya que la libertad de mente significa un poder mental capaz de un ejercicio independiente, emancipado del control de otros, no la mera operación externa sin ataduras* (p. 64. Traducción propia)

El científico necesita esta independencia intelectual para poder plantear conjeturas y buscar su justificación sin apegarse a dogmas. Por lo general, el científico se encuentra con hechos y busca su causa. La disciplina mental le ayudará descubrir lo que hay en medio y si la causa encontrada es razonable.

En este sentido, el pensamiento matemático podría ser de gran ayuda. Por consiguiente, sería recomendable que el estudio de la matemática se abocara a desarrollar el pensamiento reflexivo a través del quehacer matemático.

Para ello es necesario cambiar el enfoque de la didáctica de la matemática que se ha dado en el ámbito escolar. La concepción de la matemática como un cuerpo de conocimiento acabado no ha cambiado (a pesar del discurso en boga): la matemática se enseña como una serie de recetas y algoritmos que se aplican en determinadas situaciones, sin que haya una reflexión verdadera sobre el origen de tales algoritmos o el porqué de las fórmulas. En este tipo de enfoque no hay espacio para el razonamiento, sólo la aplicación mecánica de recetas.

Por el contrario, en carreras de matemática pura, el enfoque es axiomático y formal, en donde el razonamiento deductivo juega un papel importante, como el método único para demostrar teoremas. Por lo general, se inicia con la definición de conceptos clave, las leyes básicas (y obvias) que rigen algunas relaciones entre tales conceptos (axiomas) y, a partir de esto, se construye la teoría, siguiendo una serie de implicaciones deductivas derivadas de los axiomas, en un principio, y de axiomas y teoremas más adelante. Una vez establecido el teorema, se ilustra su aplicación con ejemplos concretos, dando a la mecanización de procedimientos un lugar relevante en el aprendizaje.

Es muy común que una clase de matemática empiece con el enunciado de un teorema y, a continuación, su demostración, llevada a cabo por el encargado del curso. Tales demostraciones son tomadas de libros de texto y se las presenta sin muchas variaciones. Si el profesor es bueno, la demostración puede llegar a buen fin sin problema alguno. Pero si el profesor no tiene mucha experiencia con la reproducción de la demostración, puede pasarse horas platicando con el pizarrón mientras los estudiantes son mudos testigos.

En ninguno de los dos extremos presentados, hay espacio para que el estudiante explore, haga conjeturas, siga líneas de razonamiento y llegue a sus propias conclusiones.

Para que el estudio de la matemática sea realmente de utilidad y refuerce el pensamiento reflexivo, es necesario dejar de verla exclusivamente como una herramienta, o exclusivamente como una serie de conceptos abstractos sin mayor aplicación en la vida cotidiana.

EL AMBIENTE DE APRENDIZAJE

El ambiente de clase debe ser tal que permita la interacción entre los estudiantes, y sean éstos quienes aprendan la materia en la acción (principio de aprender haciendo). En este sentido, para que un estudiante aprenda en el seno de un grupo es necesario que sienta confianza y seguridad. Esto se lograría si el grupo o la clase se conformara en una comunidad de aprendizaje.

Así, entendemos por **comunidad de aprendizaje** un grupo de individuos que ponen sus destrezas, capacidades, habilidades y conocimiento al servicio de un fin común: el aprendizaje del conocimiento útil para la comunidad. Si la comunidad se forma en el ámbito escolar, entonces el conocimiento a aprender sería el estipulado en el programa de estudios.

Para que sea efectivo, el ambiente que se debería dar en una comunidad de aprendizaje sería un ambiente de respeto, tolerancia y cooperación (adaptado de Flores y Gómez, 2009).

- **Tolerancia**. Capacidad de considerar y, en su caso, aceptar las ideas de los demás; esto lleva a una convivencia armónica en la que no existen prejuicios acerca del género, la raza o las preferencias sexuales. La tolerancia y el respeto están en la base de la no discriminación.
- **Respeto**. Reconocimiento del derecho a ser de los seres vivos; con respecto a las personas, se trata del reconocimiento de sus derechos y su dignidad. Implica una actitud de tolerancia y reconocimiento a las personas, la sociedad y la naturaleza. El respeto y la tolerancia implican un aumento en la autoestima de los estudiantes.
- **Cooperación**. Trabajo conjunto para el logro de metas comunes; el objetivo de la cooperación es el beneficio mutuo; implica la capacidad de hacer de lado ideas y propuestas propias, cuando sea necesario.

Consideramos, también, que cada ambiente escolar de aprendizaje se conforma a partir de cinco dimensiones (Flores 2017, adaptadas de Schoenfeld y The teaching for a Robust Understanding Project, 2016):

- **Contenido Curricular**. Temática, aprendizajes, estrategias didácticas y objetivos contemplados en el currículo; debe estar acorde con el nivel educativo del que se trate. En un buen ambiente de aprendizaje, las actividades contribuyen al desarrollo de los estudiantes como pensadores reflexivos, flexibles y con recursos teóricos para afrontar las situaciones a las que se enfrenten.
- **Demanda Cognitiva**. Es el grado de complejidad con que se deben manipular la información y los conceptos disciplinares en las actividades de aprendizaje. La demanda cognitiva de las actividades debe ser tal que signifiquen un reto para el estudiante sin llegar a ser algo imposible de llevar a cabo. Parte de un buen ambiente de aprendizaje sería aquel en el cual la demanda cognitiva de las actividades fuera la adecuada al nivel educativo y el esfuerzo cognitivo de los estudiantes para realizarla fuera mínimo.
- **Acceso Equitativo al Contenido**. Oportunidades de aprendizaje que tienen los estudiantes en el aula. Un ambiente de aprendizaje equitativo debe permitir y fomentar la participación de todos los estudiantes en las actividades de aprendizaje. El trabajo en equipo es el vehículo para establecerlo, así como la supervisión continua del profesor y los debates grupales. Un ambiente de aprendizaje equitativo deja de lado prejuicios de género, raza, religión o preferencia sexual, y da voz a todos los integrantes de la comunidad.

- **Identidad y Pertenencia**. Es el grado en que un estudiante se siente identificado con el ambiente de aprendizaje e integrante de la comunidad conformada por el grupo. Parte de su identidad tiene que ver con la concepción del estudiante sobre sí mismo como un buen aprendiz, dispuesto a compartir su conocimiento con los demás y a recibir ideas y comentarios de otros aprendices o del profesor. El ambiente de aprendizaje debe fomentar la autoestima del estudiante y su capacidad como aprendiz afectivo y autónomo.
- **Retroalimentación Formativa**. Está conformada por las actividades de aprendizaje y la información que el profesor lleva al aula como productos de una evaluación. Los resultados de la evaluación en el aula sirven, en parte, para identificar errores y debilidades en el aprendizaje; la retroalimentación formativa sirve para eliminar debilidades y corregir errores.

Para que el aprendizaje sea efectivo y llegue a todos los integrantes de la comunidad, en el ambiente de aprendizaje debe haber un equilibrio entre estas cinco dimensiones.

En una comunidad de aprendizaje la evaluación tiene un papel central en el fomento y la adquisición del conocimiento. En el próximo capítulo se hará una reflexión más profunda sobre la evaluación y su papel en el fomento del aprendizaje; por lo pronto, finalizamos el presente, adelantando algunas ideas sobre cuáles son las implicaciones para la evaluación en una didáctica centrada en el aprendizaje:

- El estudiante es quien aprende, por tanto, es quién debe dar evidencias de su aprendizaje.
- Las evidencias deben ser tanto en su discurso como en su forma de aplicar el conocimiento.
- Los demás estudiantes consideran las evidencias y debaten sobre el aprendizaje de su compañero.

El profesor organiza la información proporcionada por las evidencias y diseña intervenciones de retroalimentación encaminadas a mejorar el aprendizaje.

EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Consideramos que la matemática es el cuerpo de conocimientos que trata sobre números y formas, la relación entre ellos, y su aplicación en situaciones específicas.

La matemática sirve como:

- Herramienta para resolver problemas;
- Teoría que nos ayuda a entender la realidad;
- Meta ciencia que se estudia a sí misma; y
- Lenguaje que permite comunicar ideas.

En un contexto escolar, para que el aprendizaje de la matemática sea efectivo y significativo (en el sentido de que tenga significado para el estudiante), su estudio debería tomar en cuenta sus cuatro funciones; una manera de hacerlo es a través de la resolución de problemas.

Retomando la concepción de Dewey sobre el pensamiento reflexivo tenemos la siguiente definición.

> ***Problema*** *es una situación que produce, en quien la enfrenta, un estado de curiosidad, perplejidad o duda, y cuya respuesta implica un acto de pensamiento reflexivo; es decir, una búsqueda o investigación sistemática que produzca un resultado o una explicación satisfactorias.*

A manera de ejemplo de una actividad de resolución de problemas en matemática, veamos la siguiente situación:

> *En la tabla siguiente se muestran las coordenadas de un cometa en su órbita alrededor del Sol, que se encuentra situado en un foco de la elipse. Para tomar las coordenadas se colocó el origen de coordenadas en el Sol y eje mayor a lo largo del eje x (las unidades de las coordenadas son UA, unidades astronómicas). (a) Encuentra la ecuación que se ajuste a los datos de la tabla. (b) ¿Cuál es la mayor distancia del cometa al sol o afelio? (c) Encuentra la excentricidad de la órbita.*

x	y	x	y
-2.1	5.5	900.1	36.1
12.9	16.3	982.4	10.9
62.6	31.5	923.4	-31.5
244.5	54.6	663.0	-52.9
579.3	62.0	450.0	-62.8
778.1	51.6	141.6	-44.5

Un primer cuestionamiento sería con respecto a si la situación es un problema en los términos de nuestra definición.

Es claro que el planteamiento responde a una actividad escolar, por tanto, quien debe enfrentarse a ella es un estudiante, tal vez de bachillerato. Por tanto, trata de dar respuesta a los incisos pues es su tarea como estudiante.

Supongamos que la situación es abordada por un equipo de dos estudiantes. ¿Cuáles serían las posibles estrategias de este equipo hipotético para llegar a las respuestas?

Lo primero, tal vez, sería conjeturar que la trayectoria es una elipse y graficar los datos para corroborar ese hecho. En la Figura 13 presentamos la gráfica construida por una pareja de estudiantes de Bachillerato con ayuda de un software de Geometría dinámica.

Puede ser que, hasta este punto, la situación no represente un problema, pues hasta el momento no hay un estado de perplejidad, duda (curiosidad, quizá, pero no es seguro).

El paso siguiente es hallar la ecuación de la elipse; con esa ecuación podemos responder lo que se pide en los otros dos incisos. Para ello, uno de los estudiantes propone la ecuación simétrica de la elipse:

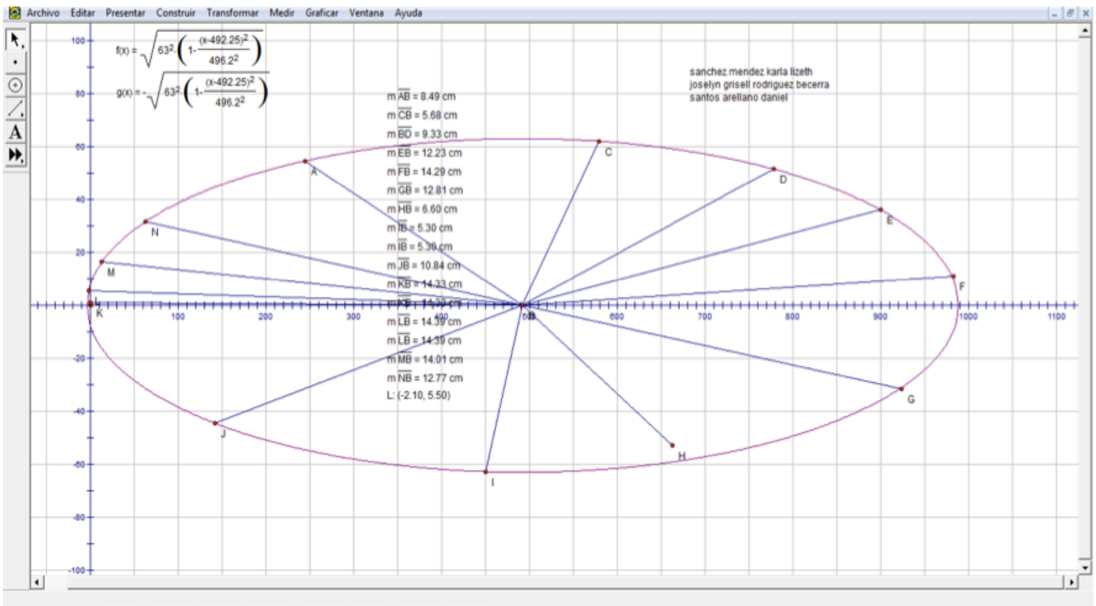


Figura 13. Trayectoria del cometa

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

En este momento es posible que su curiosidad se ponga en juego y sea un reto encontrar las coordenadas del centro y las longitudes de los dos semiejes.

Toman cuatro puntos de la tabla pues son cuatro constantes las que necesitan; escogen los puntos y sustituyen en la ecuación para obtener un sistema de cuatro ecuaciones de cuatro incógnitas. Al hacerlo caen en la cuenta de que las ecuaciones no son lineales y la resolución del sistema se complica demasiado.

Aquí entran en un estado de perplejidad y, tal vez, de preocupación y duda, que dispararía su pensamiento reflexivo: ¿nos ponemos a investigar cómo se resuelve un sistema como el que tenemos o buscamos otra alternativa? ¿hay tiempo para hacer la investigación? ¿Tenemos acceso a Internet para hacer la búsqueda?

La otra alternativa sería usar la ecuación general de la elipse: esto implica tener cinco constantes (o incógnitas) en un sistema de cinco ecuaciones. Pero las ecuaciones son lineales y pueden usar cualquiera de los métodos que han visto en clase. Parece ser que aquí está la solución a su problema.

Plantean la ecuación general:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

Y proceden a sustituir puntos para formar su sistema de ecuaciones.

Hasta aquí nuestro ejemplo. En conclusión, podemos decir que la situación se puede considerar un problema para los estudiantes pues los pone en un estado de duda, perplejidad y, muy posiblemente, de curiosidad.

En el intercambio de razonamientos para tomar una decisión hay un proceso de argumentación en pro de una u otra estrategia; se pueden formar conjeturas y formas para corroborarlas o, en su caso, convencerse de la corrección o no de sus resultados.

Consideramos que gran parte del aprendizaje del estudiante se da durante el intercambio de argumentos para decidirse por una u otra estrategia y en la comprobación y justificación de resultados.

Finalmente, la resolución de problemas debe culminar con una discusión grupal sobre las soluciones encontradas y las estrategias propuestas y la institucionalización del conocimiento generado.

En consecuencia, el profesor es el encargado de diseñar o adaptar las actividades de aprendizaje y dirigir las acciones de los estudiantes hacia su problematización y su análisis.

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

La modelización es el proceso de construcción de un modelo o un esquema teórico de un fenómeno o de una situación dada; en particular nos interesa la ***modelización matemática***[2] que entenderemos como el proceso de encontrar un modelo matemático que reproduzca de manera más o menos fiel los datos numéricos obtenidos del estudio de un fenómeno (natural o no) y nos ayude a entender mejor el fenómeno en estudio.

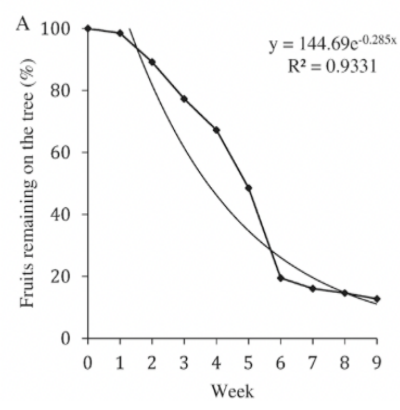


Figura 14. Cantidad de frutos por

Ahora bien, en una comunidad de aprendizaje de la matemática, el uso de la modelización resulta de gran utilidad pues permite hacer uso de las cuatro funciones de la matemática que vimos párrafos más arriba. Propicia, incluso, la mecanización de procedimientos y de algoritmos.

A manera de ilustración, retomemos el caso mencionado al inicio del texto sobre la floración de los frutos de longan. En la figura 14 tenemos la gráfica A que mostramos en la Figura 1.

---

[2] Se acostumbra usar el término *modelación matemática* para indicar que la modelización se usará para fines educativos. En este texto usaremos los términos *modelizar y modelización.*

Tomando en cuenta solamente los puntos de las mediciones de campo podríamos pedir a los estudiantes que ajustaran una función polinómica que pasara los más cerca posible de todos los puntos.

Si queremos ajustar una función polinómica, por ejemplo, de tercer grado sin recurrir al ajuste de curvas estadístico, deberíamos tomar cuatro puntos y con ellos encontrar la regla de correspondencia de la función. El proceso implica la resolución de un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas. Para tener una curva aceptable, es posible se hagan dos o más intentos, lo cual lleva a que el estudiante vaya sistematizando y mecanizando el procedimiento, sin perder de vista el objetivo que es tener un modelo matemático que *explique* el comportamiento de los frutos en el árbol.

El proceso de modelización implica varias etapas que presentamos en el diagrama de la Figura 15.

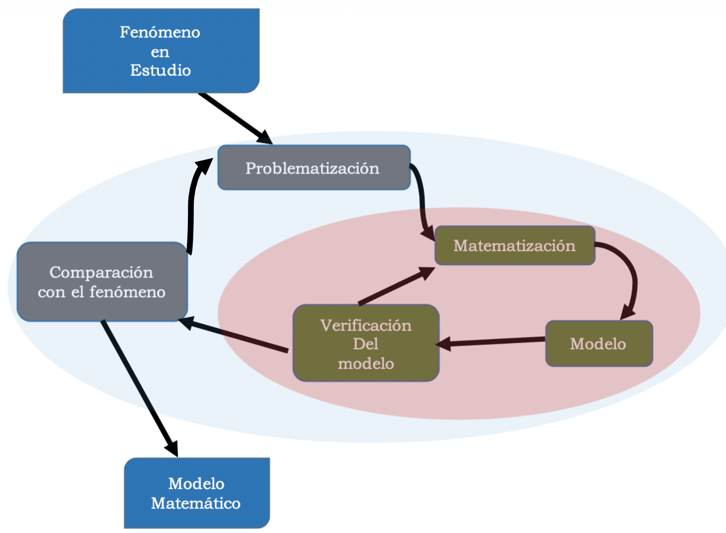


Figura 15. Proceso de modelización matemática.

La primera consiste en definir el fenómeno que se quiere estudiar, por ejemplo, la permanencia de frutos en el árbol de longan.

La segunda etapa es la problematización de una parte del fenómeno: ¿cómo varía la cantidad de frutos con respecto al tiempo?

La tercera implica el planteamiento del problema de forma matemática, en nuestro ejemplo sería hallar la función que mejor se ajuste a los datos de campo.

La cuarta consiste en hallar el modelo, ya sea de manera algebraica o usando un ajuste de curvas; en el caso de la permanencia de los frutos en el árbol se utilizó un estudio de correlación y de regresión.

La quinta implica una verificación del modelo matemático, ¿qué tan bien se ajusta a los valores obtenidos? Si el resultado no es razonable, es necesario regresar al planteamiento matemático y revisarlo, buscar otro modelo y probarlo; es decir, entramos en un ciclo que llamamos matemático.

Si el modelo que encontramos nos parece razonable desde el punto de vista matemático, entonces pasamos a la sexta etapa, que consiste en comparar los datos que nos arroja el modelo con lo que sabemos del fenómeno para determinar si nos ayuda a explicarlo; en el caso de que la respuesta sea negativa, regresamos a una nueva problematización del fenómeno que nos lleva a repetir de nuevo todo el proceso.

Por el contrario, si la comparación está dentro de lo razonable, concluimos que el modelo es útil y lo usamos para explicar o reproducir los hechos del fenómeno e, incluso, para reproducir fenómenos distintos con un comportamiento parecido.

En un aula de bachillerato, las actividades de modelización, generalmente, se limitan a describir el fenómeno problematizado y matematizado, y se enfocan en la obtención de modelos matemáticos; esto es, se limitan al ciclo matemático del proceso.

RECAPITULACIÓN

Partimos de la tesis de que el *pensamiento matemático* es una manifestación del *pensamiento reflexivo* cuando un individuo se aboca a resolver un problema matemático o cuando hace matemática.

El pensamiento reflexivo es una concatenación de ideas en la cual una conduce a la siguiente hasta llegar a una conclusión que debe ser corroborada; el surgimiento de la primera idea por lo general sigue un proceso abductivo que implica la formulación de una conjetura que necesita validación.

En muchos casos, el proceso de resolución de problemas matemáticos incluye la necesidad de validar o justificar los resultados obtenidos, para ello es necesario hacer uso de esquemas de argumentación; la experiencia nos dice que, en un aula de matemática, hay cuatro esquemas que se utilizan con bastante frecuencia: *autoritarios*, que apelan al conocimiento de una autoridad que puede ser un maestro, un experto, libro de texto, etcétera; *de recuento fáctico*, que es el recuento de los pasos seguidos para llegar al resultado; *empíricos* que se basan en una figura o en mediciones casi siempre en un proceso inductivo; y *analíticos*, que siguen un razonamiento deductivo.

Los esquemas empíricos podrían llevar al uso de esquemas analíticos que, a su vez, conducirían a la demostración o justificación matemática.

Para que el uso de la argumentación y de la resolución de problemas sea más efectiva, se propone utilizar actividades de modelización matemática que permiten el uso de la matemática en sus cuatro funciones: como *herramienta* (para resolver problemas), como *teoría* (como auxiliar en el entendimiento de fenómenos), como *metaciencia* (ciencia que se estudia a sí misma: matemática pura) y como *lenguaje* (vehículo de comunicación).

La probabilidad de optimizar el aprendizaje de la matemática aumenta con la conformación en el aula de una comunidad de aprendizaje; esto es, una comunidad en la que todos sus integrantes ponen su esfuerzo en la consecución del conocimiento propuesto (en este caso por el currículo de matemática).

Una buena comunidad de aprendizaje, no solo en el ámbito de la matemática, es aquella que posee un equilibrio entre sus cinco dimensiones que la caracterizan: *contenido curricular; demanda cognitiva; acceso equitativo al conocimiento; identidad y pertinencia; retroalimentación formativa.*

Este tipo de comunidad implica el fomento de tres valores, la *tolerancia*, el *respecto* y la *cooperación* que asegurarán un ambiente de armonía y trabajo conjunto por un bien común.

Como sucede con cualquier propuesta didáctica, la que presentamos en este texto no es una receta ni significa un éxito total en el aprendizaje de nuestros estudiantes; todo dependerá de la manera en que se vaya instrumentando y de las condiciones particulares de cada grupo: profesor, estudiantes, material de aprendizaje.

Lo que sí es un hecho es que el grado de libertad intelectual de un individuo dependerá del grado de desarrollo de su pensamiento reflexivo y el grado de dominio de los contenidos curriculares abordados en la escuela.

¡Mucho éxito!

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

*1. El siguiente texto corresponde a una nota periodística adaptada de un diario estadounidense:

La campaña de Donald Trump hacia la presidencia de EUA ha perdido fuerza desde la difusión de un audio, de 2005, en el que se le escucha hablar de las mujeres en términos despectivos, y cómo se dejan tocar si eres famoso. Jessica L. afirmó que se encontró con Trump en un vuelo comercial hace tres décadas, éste le tocó los senos e intentó meter la mano por debajo de su falda; Rachel C. declaró que, en 2005, Trump la besó en la boca en contra de su voluntad, durante un encuentro en la Torre Trump.

a) Considera la nota como una argumentación. ¿De qué se trata? ¿Cuál es la hipótesis, la tesis y los garantes?
b) Construye un diagrama de Toulmin de esta argumentación.
c) ¿Se trata de una falacia? Explica tu respuesta.

2. Construye un diagrama de Toulmin de la siguiente argumentación y explica por qué sí o por qué no se trata de una falacia.

Los bancos están absorbiendo el alza en las tasas de referencia y el consumidor se beneficia. Esto es por qué hay una competencia feroz entre las instituciones.

*3. El siguiente texto fue tomado del libro *Las Claves de la Argumentación* de Anthony Weston:

En épocas pasadas, las mujeres se casaban muy jóvenes. Julieta, en Romeo y Julieta de Shakespeare, aún no tenía 14 años. En la Edad Media, la edad normal del matrimonio para las jóvenes judías era de trece años. Y durante el Imperio Romano muchas mujeres romanas contraían matrimonio a los trece años o incluso más jóvenes.

a) ¿Sobre qué trata esta argumentación?
b) Construye su diagrama de Toulmin y explica si se trata de una falacia o no.

4. Considera las siguientes afirmaciones, ¿cuál es su garante y el sustento del garante?

a) La suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es de 180°.

b) La diagonal de un paralelogramo forma dos triángulos congruentes en su interior.

c) La gráfica de una parábola siempre cruza el eje y.

d) Un pentágono regular siempre se puede inscribir en un círculo.

e) Toda ecuación de segundo grado con una incógnita se puede resolver por el método de completar cuadrados.

5. Construye el diagrama de Toulmin de las cinco afirmaciones anteriores. ¿De qué manera puede ayudar el diagrama para determinar la validez de tu argumentación? ¿Cuáles de las afirmaciones del Ejercicio 4 son válidas?

*6. Con respecto al Ejercicio 4, basándote en los diagramas de Toulmin del Ejercicio 5, usa esquemas de argumentación analíticos para determinar la veracidad de cada afirmación.

7. Considera la siguiente proposición:

Cualquier número racional diferente de cero, r, se puede expresar de manera única como $r = \frac{a}{b}$, con b > 0 y MCD de a y b igual a 1 (mcd(a,b) = 1)

Usa un esquema de argumentación analítico para establecer si la afirmación es válida o no. *Sugerencia:* Haz un diagrama de Toulmin y determina cuáles podrían ser lo posibles garantes y su sustento; determina que conceptos necesitas definir.

8. Un punto en una circunferencia cuyo radio es la unidad de medida tiene como coordenadas (x, y). Demuestra que se cumple la relación $x^2 + y^2 = 1$.

*9. Si se tiene un segmento de recta y con un compás, abierto a más de la mitad de la longitud del segmento, se trazan arcos a un lado y otro del segmento, la recta que une las intersecciones de los arcos será perpendicular al segmento y pasará por su punto medio. A tal recta se le llama *mediatriz* del segmento.

Utiliza un esquema de argumentación analítico para establecer la validez de la afirmación anterior.

10. Argumenta si la siguiente proposición es verdadera o falsa:

Sea P(n) una proposición que depende del entero positivo n.

Si P(1) y P(k) son verdaderas, implica que P(k+1) también es verdadera, entonces P(n) es verdadera para todo n ∈ P. Con P el conjunto de los enteros positivos.

Construye su diagrama de Toulmin.

*11. En una clase de bachillerato, la maestra planteó el siguiente problema:

En mi tribu, cuando se colocan de dos en fondo sobra uno, cuando se colocan de tres en fondo sobra uno, cuando se colocan de cuatro en fondo sobra uno, cuando se colocan de cinco en fondo sobra uno, cuando se colocan de seis en fondo sobra uno, y, por fin, cuando se colocan de siete en fondo quedan distribuidos exactamente. ¿Cuántos tribunos hay en mi tribu?

Uno de los estudiantes obtuvo 301 como respuesta, pero la maestra dijo que había muchas más. ¿El resultado es correcto? ¿por qué?

Encuentra otros resultados y explica cómo los obtuviste. ¿Es posible generalizar el resultado? En caso de que la respuesta sea afirmativa, mostrar el caso general y justificar la respuesta.

Explica dos maneras de resolver el problema da una justificación de cada una.

*12. En una pista de carreras elíptica dos atletas empiezan a correr al mismo tiempo desde el mismo lugar, uno con una rapidez promedio de 12 km/h, en un carril que tiene una longitud de 402 metros y el otro en un carril de 390, con una rapidez promedio de 12.2 km/h. Si los atletas dan 20 vueltas, ¿cuántas veces están en el mismo punto y cada cuánto tiempo? Explica tu respuesta.

¿Se puede generalizar para cualquier rapidez de los corredores y cualquier longitud de la pista? ¿Por qué?

*13. El siguiente texto está encriptado: BWLMBKXWXUBYÑCIRBBYFARBERXHAUX.

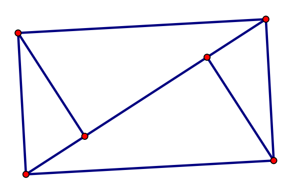
En la tabla se muestra parte de la clave para descifrar el texto.

Letra	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Número	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Regla	0	7	14	21	1	8	15	22	2	9	16
Letra cifrada	A	H	Ñ	U	B	I	O	V	C	J	P

a) Descifra el texto y explica cómo lo hiciste.
b) Explica el proceso de encriptación usando aritmética modular.

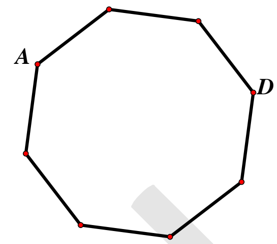
14. Un grupo de topógrafos deben calcular la altura de una montaña. Para ello, desde un cierto punto en el nivel del suelo, miden el ángulo de elevación a la cima de la montaña, este ángulo fue de 21.7°. Después se acercan 500 m a la montaña y vuelven a medir el ángulo de elevación, éste fue de 35.9°. Con los datos medidos, calculan la altura de la montaña en 442 m. ¿Qué procedimiento pudieron haber seguido? Justifica tu respuesta y da su diagrama de Toulmin.

*15. Tenemos una hoja rectangular de papel, que fue doblada como se muestra en la figura, de modo que se forma un rectángulo de 3 x 4 cm. ¿Qué dimensiones tiene la hoja desdoblada? ¿Cualquier hoja rectangular se puede doblar de esa manera o sólo algunas? Explica tu respuesta.



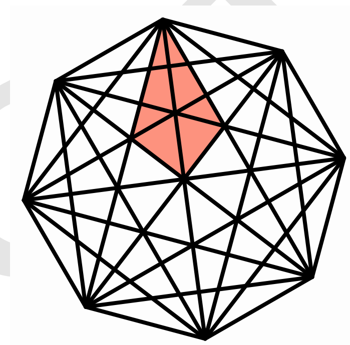
*16. Tenemos un envase cónico de 13 cm de radio y 19 de altura. El envase está completamente sellado y tiene un volumen de agua que cuando se encuentra con la base hacia arriba llega a 17 cm de altura. ¿A qué altura llegará el líquido si se le coloca con la base hacia abajo? Justifica tu respuesta

17. El octágono regular que se muestra en la figura tiene 5 cm de lado. Encuentra la longitud del segmento *AD.*



Justifica tu resultado y da su esquema de Toulmin

18. En la figura te presentamos un octágono regular y todas sus diagonales.



a) Si se tiene la medida del lado del octágono, ¿es posible calcular las dimensiones del cuadrilátero coloreado? ¿Cómo?

b) En el octágono encuentra todos los cuadriláteros semejantes al coloreado y explica por qué son semejantes.

*19. Encuentra las alturas del triángulo formado por los puntos (5, 6), (-3, -2) y (5, -7). Sin utilizar la fórmula de la distancia de un punto a una recta. Explica paso a paso el procedimiento que seguiste.

*20. Se puede construir una elipse doblando una hoja de papel circular si trazamos un punto cerca de su borde y hacemos dobleces de forma que el borde pase por el punto. Los dobleces así obtenidos constituyen la envolvente de la elipse, el punto trazado y el centro de la hoja son sus focos. ¿Cómo demostramos que se trata de una elipse?

21. Encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la recta $5x + 3y - 4 = 0$ y que pasa por el punto (-3, 5), sin utilizar la fórmula que relaciona las pendientes de rectas perpendiculares. ¿Cómo justificas tu resultado?

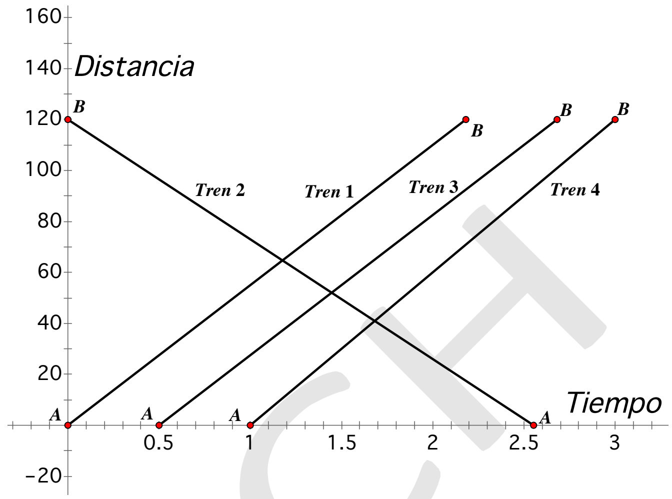
*22. Un segmento de recta se mueve de forma tal que uno de sus extremos siempre está sobre el eje de las abscisas y el otro sobre el eje de las ordenadas, ¿cuál es el lugar geométrico de su punto medio? ¿Cómo justificas tu respuesta?

*23. Las siguientes afirmaciones, ¿son verdaderas o falsas? Justifica tu respuesta:

a) Toda circunferencia cuyo diámetro es la cuerda focal de una parábola es tangente a su directriz.

b) Toda circunferencia se puede considerar como una elipse cuya excentricidad es cero.

24. La gráfica representa el recorrido de cuatro trenes, tres de ellos van de la ciudad A a la ciudad B, separadas por una distancia de 120 kilómetros y el otro va de B a A. Responde los incisos siguientes y en cada caso justifica tu respuesta.



a) ¿Qué trenes viajan a la misma velocidad? ¿Cuál es esta rapidez?
b) ¿Cuál es el tren que viaja más lentamente? ¿Con qué rapidez viaja?
c) El tren (2) debería viajar a 55 km/h, ¿con cuántos minutos de retraso llegó a A?
d) ¿Cuál de los cuatro recorridos presenta variación directamente proporcional? ¿Por qué?
e) ¿Cuál es el dominio y el contradominio de cada una de las funciones que representan los recorridos?
f) ¿podemos considerar las gráficas dadas como modelos matemáticos? ¿Por qué?

*25. En su declaración sobre una investigación por muerte accidental, el declarante dijo que él y su novia iban en la camioneta que él conducía cuando se suscitó una discusión entre ellos. Su enojo fue tal que disminuyó la velocidad de la camioneta y le pidió a su acompañante que se bajara, abrió la puerta del lado de ella y, sin esperar a que el vehículo se parara por completo la empujó hacia fuera. Ella cayó en el pavimento y se quedó ahí, sin poder pararse. Al percatarse de esto, detuvo por completo la camioneta y se bajó para ir a auxiliarla. Cuando estaba por llegar a donde ella se encontraba vio pasar la camioneta en reversa y cómo atropellaba a su novia causándole la muerte. En su apuro por ayudarla olvidó poner el freno de mano. ¿Es esto posible? ¿Cómo usarías la matemática para probar la factibilidad de lo declarado?

Haz un diagrama de Toulmin con la argumentación del declarante. ¿Es una falacia? ¿Por qué?

26. En la figura se muestra las condiciones de temperatura ambiente en el estado de Guanajuato durante un año.

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura media (°C)	13.9	15.2	17.6	19.6	20.8	20.1	18.9	19.1	18.4	17.2	15.6	14.3
Temperatura min. (°C)	6.1	7	9.3	11.4	12.9	13.5	12.9	13	12.7	10.5	8.1	6.8
Temperatura máx. (°C)	21.7	23.4	26	27.9	28.7	26.8	25	25.2	24.2	24	23.2	21.8
Temperatura media (°F)	57.0	59.4	63.7	67.3	69.4	68.2	66.0	66.4	65.1	63.0	60.1	57.7
Temperatura min. (°F)	43.0	44.6	48.7	52.5	55.2	56.3	55.2	55.4	54.9	50.9	46.6	44.2
Temperatura máx. (°F)	71.1	74.1	78.8	82.2	83.7	80.2	77.0	77.4	75.6	75.2	73.8	71.2
Precipitación (mm)	13	7	7	15	36	130	145	139	132	47	14	12

Tomado de: https://es.climate-data.org/america-del-norte/mexico/guanajuato/guanajuato-3370/#climate-table

Encuentra un modelo matemático que ayude a predecir la temperatura media en el estado por día. ¿Qué tan confiable es este modelo? Explica tu respuesta.

*27. En la tabla siguiente se muestra la rapidez (km/h) que lleva un automóvil en el momento en que su conductor aprieta el freno a fondo hasta que el auto queda en reposo y la longitud (m) de la huella que dejan los neumáticos en el asfalto.

r	30	40	45	55	60	70	75	80	90	95	100	105	110	120
d	4.5	8	10.2	15	18	24.5	28	32	40.5	45	50	55	60.5	72

Encuentra la ecuación de la curva que, según tu criterio, se ajuste mejor a los datos. Con esta ecuación encuentra la rapidez inicial de un auto que deja una huella de 20 m de longitud. ¿Qué tan confiable es tu modelo? ¿Qué limitantes puede tener? Aparte de la rapidez con la que inicia el frenado el automóvil, ¿de qué otros factores dependerá la longitud de la huella? Explica detalladamente tus respuestas.

28.a) Cuando una gota de sangre cae al suelo, dependiendo del ángulo de inclinación con el que pega y de la rugosidad del piso, forma una figura que se puede aproximar con una elipse. Con la medida de los ejes mayor y menor de esta elipse es posible estimar el ángulo de la trayectoria de la gota con respecto a la horizontal. ¿Explica cómo se podría hace la estimación y que limitantes se tendría?

b) En una escena de hechos se encuentran manchas de sangre en el piso, de las cuales cuatro de ellas se muestran en el diagrama de la figura.

Las medidas de la longitud de los ejes mayor y menor para cada mancha son los siguientes de izquierda a derecha: 1.32 cm y 0.51 cm; 1.49 cm y 0.88 cm; 2.07 cm y 1.09 cm; y 2.10 cm y 0.79 cm; mientras que la distancia media del centro de cada mancha, igual de izquierda a derecha, al centro del círculo de convergencia son 14.15 cm, 13.89 cm, 12.87 cm y 14.15 cm. ¿Cuál es la altura aproximada de la cual cayeron las gotas? ¿Qué limitantes tiene este método?

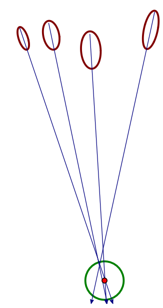


Figura 2.14. Zona de convergencia de manchas de sangre.

*29. En la tabla se muestran las coordenadas de un cometa en su órbita alrededor del Sol, que se encuentra situado en un foco de la elipse. Para tomar las coordenadas se colocó el origen de coordenadas en el Sol y eje mayor a lo largo del eje x (las unidades de las coordenadas son UA, unidades astronómicas). (a) Encuentra la ecuación que se ajuste a los datos de la tabla. Explica por qué consideras que es una buena curva de ajuste. (b) ¿Cuál es la mayor distancia del cometa al sol o afelio? (c) Encuentra la excentricidad de la órbita.

x	y	x	y
-2.1	5.5	900.1	36.1
12.9	16.3	982.4	10.9
62.6	31.5	923.4	-31.5
244.5	54.6	663.0	-52.9
579.3	62.0	450.0	-62.8
778.1	51.6	141.6	-44.5

Referencias y bibliografía recomendada

Anderson, D. (1995). *Strand of system. The philosophy of Charles Peirce*. West Lafayette: Purdue University Press.

Dewey, J. (1910) *How we think*. EUA: D. C. Heath & co. Publishers.

Fann, K. T. (1970). *Peirce's theory of abduction*. The Hague: Nijhoff.

Flores, A. H. (2006). *Esquemas de argumentación y Demostración Matemática en Profesores de Bachillerato*. Tesis Doctoral no publicada. CINVESTAV-IPN, México.

Flores, A. H. (2017). Pensamiento Matemático y El Quehacer Científico. *Revista Pädi.* n. 1. Universidad Autónoma de Querétaro, México.

Flores, A. H., y Gómez, A. (2009), Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. Educación Matemática, vol. 21, núm. 2, 117-142.

Lakatos, I. (1976) *Proofs and Refutations: the logic of mathematical Discovery*. EUA: Cambridge University Press. DOI: http://dx.doi.org/10.1017/CBO9781316286425

Peirce, C. S. (2014) *Illustrations of the logic of science,* by de Waal, Cornelis, Peirce, Charles Sanders. Open Court.

Pham,V. T., Herrero, M. y Hormaza J. I. (2016) Fruiting pattern in longan, *Dimocarpus longan*: from pollination to aril development. *Annals of Applied Biology*. 169 (pp. 357–368)

Reichertz, J. (2010) Abduction: The Logic of Discovery of Grounded Theory. *Forum Qualitative Social Research*. Vol. 11, no. 1.

Rodgers, C. (2002) Defining Reflection: Another Look at John Dewey and Reflective Thinking. Teachers College Record. Volume *104, Number 4,* Columbia University.

Russell, H. N. (1965). Notes toward a logic of discovery. En Richard J. Bernstein (Ed.), *Perspectives on Peirce*. (pp.42-65). New Haven: Yale University Press.

Schoenfeld, A. y The Teaching for Robust Understanding Project (2016).

Stanford Encyclopedia of Philosophy, consultada el 16 de agosto de 2020: http://plato.stanford.edu/entries/democritus/#2